

Matemática 2A

Para estudiantes de Arquitectura

AUTORES: Cátedra Matemática IA y IIA-Arquitectura
Arq. Clarisa LANZILLOTTO-Arq. Miriam AGOSTO
Arq. Mirta HEREDIA- Arq. Silvio CHAILE- Arq. Pablo ALMADA- Arq. Andrea FARÍAS
Ing. Patricia CRIVELLO- Prof. Gerardo GNAVI- Ing. Alejandro TORRES



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba



FAUD
Facultad de Arquitectura,
Urbanismo y Diseño





MATEMÁTICA IIA

para ESTUDIANTES
DE ARQUITECTURA

2da EDICIÓN - 2020

**CÁTEDRA DE MATEMÁTICA IA Y
MATEMÁTICA IIA**

EQUIPO DOCENTE:

Prof. Titular:

Arq. Lanzillotto, Clarisa

Prof. Adjunta:

Arq. Agosto, Miriam

Prof. Asistentes:

Arq. Heredia, Mirta

Arq. Farías, Andrea

Ing. Crivello, Patricia

Arq. Chaile, Silvio

Arq. Almada, Pablo

Prof. Gnavi, Gerardo

Arq. Fernanda Franciosi

EGRESADOS ADSCRIPTOS

ALUMNOS ADSCRIPTOS

CARRERA DE ARQUITECTURA

FACULTAD DE ARQUITECTURA,

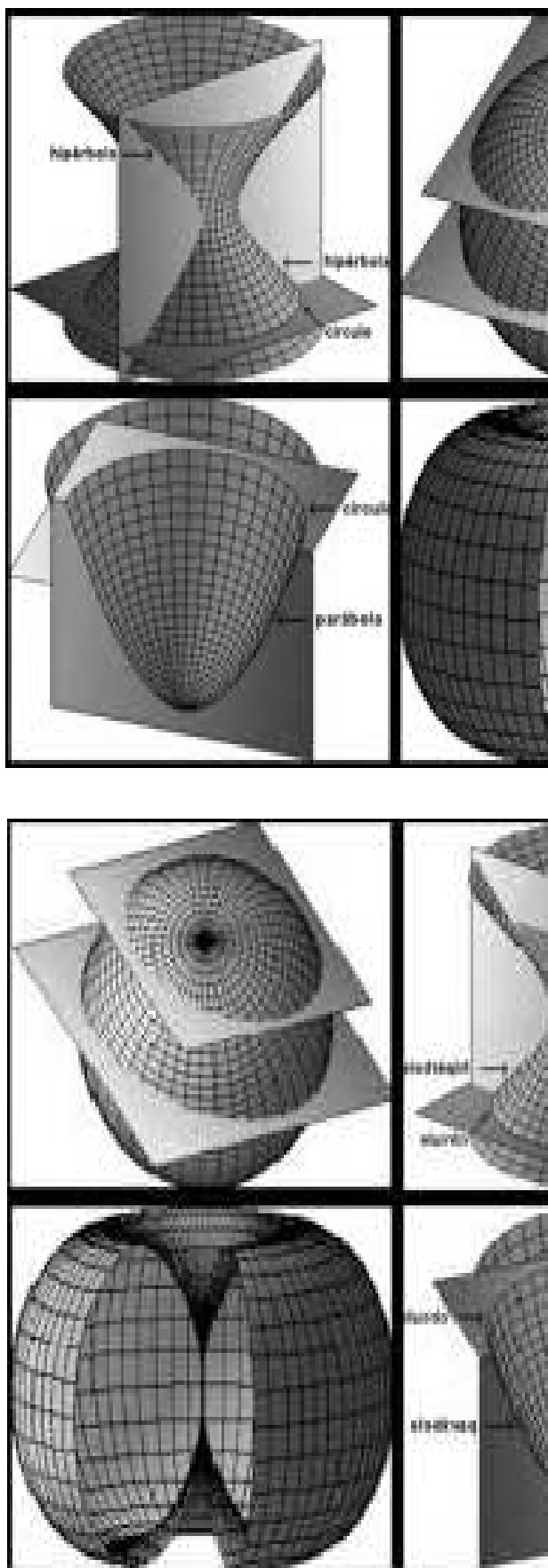
URBANISMO Y DISEÑO

UNIVERSIDAD

NACIONAL

DE

CÓRDOBA



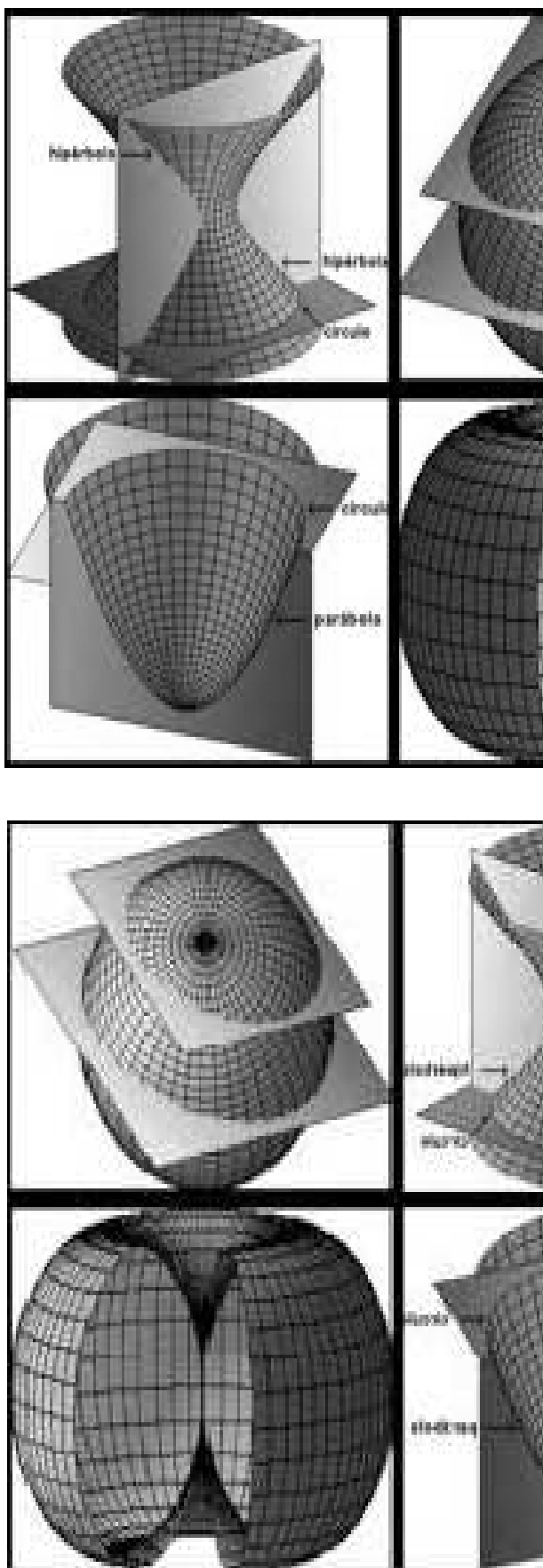
Coordinación, compilación, compaginación y revisión:

Arq. Clarisa Lanzillotto

Formato libro e idea de tapa:

Arq. Andrea Farías

AGRADECEMOS



A nuestros maestros, docentes de alma que han contribuido a nuestra formación y que han pertenecido a la Cátedra desde los inicios hasta hoy brindando su sabiduría y enseñanza y contribuyendo generosamente a nuestra formación humana y como docentes en la disciplina.

A nuestros estudiantes, verdaderos protagonistas del proceso de enseñanza-aprendizaje que contribuyen año a año al crecimiento mutuo y al ejercicio de la noble tarea de enseñar y aprender en el ámbito de nuestra querida FAUD.

PRESENTACIÓN

LA CÁTEDRA

ESTOS SOMOS

PROFESOR TITULAR:

Arq. Clarisa Lanzillotto

Egresada de la FAUD -UNC.
clarisa.lanzillotto@unc.edu.ar



PROFESOR ADJUNTO:

Arq. Miriam Agosto

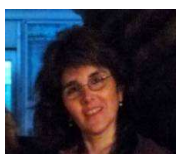
Egresada de la FAUD -UNC.
miriam.agosto@unc.edu.ar



PROFESOR ASISTENTE:

Arq. Mirta S. Heredia

Egresada de la FAUD -UNC.
mirta.heredia@unc.edu.ar



PROFESOR ASISTENTE:

Arq. Andrea Farías

Egresada de la FAUD -UNC.
andrea.farias@unc.edu.ar



PROFESOR ASISTENTE:

Ing. Civil Patricia Crivello

Egresada de la FCEFyN-UNC.
patricia.crivello@unc.edu.ar



PROFESOR ASISTENTE:

Arq. Silvio A. Chaile

Egresado de la FAUD-UNC
silvio.chaile@unc.edu.ar



PROFESOR ASISTENTE:

Arq. Pablo Almada

Egresado de la FAUD-UNC
pablo.almada@unc.edu.ar



PROFESOR ASISTENTE:

Prof. Gerardo Gnavi

Egresado de la Fac. de Psicología -UNC
gergnavi@unc.edu.ar



PROFESOR ASISTENTE:

Arq. Fernanda Franciosi

Egresada de la FAUD-UNC
feFranciosi@unc.edu.ar



ESTE EQUIPO DOCENTE HARÁ DE LA MATEMÁTICA UNA
ASIGNATURA DE CURSADO PLACENTERO



CONTENIDOS

PRESENTACIÓN: MATEMÁTICA Y ARQUITECTURA	9
MATEMÁTICA IIA- Modalidades de enseñanza	11
OBJETIVOS-	12
PROGRAMA SINTÉTICO	13
GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL ESPACIO:	
COORDENADAS TRIDIMENSIONALES	
Introducción	14
Aplicaciones	27
DEL PLANO (2D) AL ESPACIO(3D):	
SECCIONES CÓNICAS Y SUPERFICIES	36
CIRCUNFERENCIA Y SUPERFICIE ESFÉRICA	
Introducción	43
Aplicaciones	48
ELIPSE Y ELIPSOIDES	
Introducción	70
Aplicaciones	75
Autoevaluación	85
HIPÉRBOLA E HIPERBOLOIDES	
Introducción	92
Aplicaciones	99
PARÁBOLA Y PARABOLOIDES	
Introducción	112
Aplicaciones	126
Ejercicio Integrador	133
EL PLANO, LA SUPERFICIE MÁS SENCILLA	138
Introducción	144
Aplicaciones	
IMÁGENES DE PRÁCTICOS	153
PALABRAS FINALES	155



-MATEMÁTICA, para estudiantes de Arquitectura.

Los contenidos de **MATEMÁTICA IIA** tienden a lograr, desde una Matemática aplicada a la Arquitectura, la paulatina evolución de los conocimientos relacionados con el estudio de las figuras planas, sus elementos y propiedades, y su posicionamiento en el plano cartesiano (dos dimensiones) trabajados en Nivel I de la carrera en la asignatura Matemática IA, hacia los necesarios para actuar en las tres dimensiones que es en definitiva el ámbito esencial de la Arquitectura. Completando lo expresado para la asignatura Matemática IA, Francis Ching, en su obra “Arquitectura, forma, espacio y orden” explica que “un punto, ente geométrico primario, indica una definida posición en el espacio y da clara idea de su existencia, situándose en un determinado campo visual con el que se relaciona”. Ese punto define diversas situaciones con su entorno y su prolongación en conjuntos de puntos, genera líneas en el espacio; las líneas definen planos y la extensión de un plano en diversos sentidos constituye un volumen cuyas propiedades mensurables son la longitud, el ancho, la profundidad, la masa, el área, su orientación y posición.

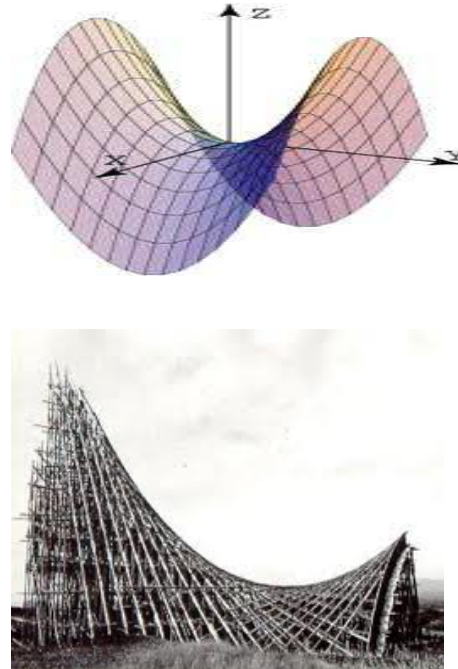
Las entidades geométricas con sus múltiples combinaciones y aproximaciones posibilitan la formación de un modelo espacial teórico que se podrá materializar: son definidoras de la forma y caracterizadoras del espacio en el que se insertan. El espacio geométrico hace factible el estudio de numerosas facetas del espacio arquitectónico: Forma, escala, proporción, orientación, visualización, organización, composición, representación.

El estudio de las entidades geométricas primarias, las figuras planas, también las secciones cónicas en este curso (circunferencia, elipse, hipérbola y parábola), los cuerpos ge-



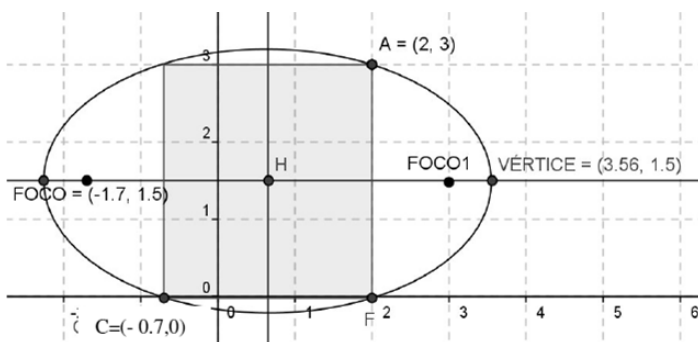
ométricos, las superficies regladas (esencialmente la más sencilla: el plano) y las superficies curvas en el espacio (cuyas generatrices son las secciones cónicas), su escala y proporción , aportan a resolver y diseñar el espacio arquitectónico.

Para la modelización del espacio, el uso de herramientas informáticas, otorga una idea más real del mismo. Los distintos programas de aplicación al Diseño Asistido por computadora, concebidos en base matemática, y Software Matemáticos amigables, como Geogebra, están al alcance del estudiante. Permiten la generación, con rapidez y eficiencia, de objetos que pueden moverse o girar respecto a un observador estacionado, o que éstos permanezcan estacionarios y que el observador se mueva alrededor de ellos, o desde puntos de vista específicos. Estas herramientas abren una ventana nueva al diseño, posibilitan la comprensión de superficies complejas desde múltiples visualizaciones, la transformación de las entidades gráficas, de sus atributos, proponiendo una nueva manera de diseñar el espacio arquitectónico.



Las entidades así creadas, estudiadas y analizadas en este curso desde la Geometría Analítica Plana y Espacial, posicionadas en sistemas de referencia en las dos y en las tres dimensiones pueden estudiarse según distintos aspectos útiles a la hora de ser replanteadas en un sitio real como también a la hora de analizar costos, presupuestos, realizar cálculos métricos y factibilidades constructivas.

La Matemática que enseñamos es fundamentalmente aplicada y orientada a resolver problemas concretos de la Arquitectura , el Urbanismo y el diseño en general.



Referencias de las imágenes:

http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Cuadricas/marco_cuadricas.htm

<http://www.ctearquitectura.es/arquitectos/100-arquitectura/pequena-guia-para-visitar-arquitectura-en-suiza/>

<https://pl.dreamstime.com/ko%C5%9Bci%C3%B3%C5%82-san-giovanni-battista-mogno-szwajcaria-image118011481>

<https://listas.20minutos.es/lista/santiago-calatrava-obras-y-proyectos-130858/>

<http://www.edificacion.upm.es/geometria/JPA/Paraboloide%20hiperbólico%20imagenes.html>

https://es.pngtree.com/freepng/beijing-national-grand-theater-scenery_1789347.html



MATEMÁTICA IIA

Modalidades de enseñanza

EL SENTIDO DE EDUCAR

“Una educación con sentido educa protagonistas, en los que cada aprendizaje significa algo para su vida. Es esa significación el punto de partida de la significación del mundo y de los demás”-

Gutiérrez Pérez y Prieto Castillo

Enseñar, aprender, la clase, el aula:

Aprender es un proceso donde intervienen variedad de factores, como la comprensión, la información, las capacidades, las competencias, los conocimientos ya adquiridos, las actitudes, la interacción con otros individuos. Involucra a la totalidad del ser humano y se produce a lo largo de toda la vida.

La enseñanza **“como acto educativo es un proceso no rígido, multivariado y contextualizado con el fin de generar, potenciar, posibilitar el Aprendizaje”.**

La clase se concibe como un espacio educativo donde se da el **“diálogo didáctico”** que involucra tres procesos: el **objeto de conocimiento, el contexto, y la intención** que es la de provocar el aprendizaje. Como docentes debemos **diseñar los materiales, los medios, las herramientas y las estrategias didácticas** para que se enseñe de un modo cierto, que ofrezca atracción y agrado para ambos, docentes y alumnos. Debemos capacitarnos para pensar y diseñar **cómo se comparte y se construye el conocimiento** en el aula.

En esta asignatura ofrecemos modalidades de enseñanza combinadas, de modo tal que el contacto con ustedes, apreciados estudiantes, sea continuo.

MODALIDAD PRESENCIAL día , horario y aula asignados

CLASES TEÓRICAS Y TEÓRICO-PRÁCTICAS A CARGO DE LA PROF. TITULAR Y ADJUNTA

TALLER- CLASES PRÁCTICAS A CARGO DE LOS PROFESORES ASISTENTES

MODALIDAD VIRTUAL ASINCRÓNICA aula virtual Plataforma Moodle uncavim10.unc.edu.ar

ACCESO PERMANENTE A MATERIALES DE ESTUDIO, VIDEOS, CLASES GRABADAS, EJERCITACIÓN, NOTAS DE INTERÉS, NOVEDADES, FOROS INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

MODALIDAD VIRTUAL SINCRÓNICA aula virtual Plataforma Adobe Connect Pro

CLASES TEÓRICAS Y PRÁCTICAS EN LÍNEA A CARGO DE LA PROF. TITULAR Y PROF. ASISTENTES. USO DEL CHAT, ENCUESTAS, TABLET, PAPEL DIGITAL, CÁMARA, RECURSOS COMBINADOS



MATEMÁTICA IIA

OBJETIVOS

-OBJETIVOS GENERALES:

- ∞ Desarrollar en el estudiante la capacidad de razonar, emitir un juicio crítico, plantear y resolver problemas dentro del mundo en que actúa potenciando la creatividad y la imaginación.
- ∞ Demostrar la importancia de la Matemática dentro de la currícula de la carrera, fortaleciendo el vínculo con otras áreas de conocimiento, en particular las construcciones, instalaciones, estructuras, topografía, la informática y las materias de diseño en toda su gama.
- ∞ Comprender y aplicar los fundamentos que constituyen las estructuras matemáticas para la modelización de situaciones reales.
- ∞ Desarrollar en el alumno la visión espacial de las formas geométricas para estimular la comprensión de la relación que existe entre los elementos geométricos abstractos y las aplicaciones reales en Arquitectura, Urbanismo y el diseño en general.
- ∞ Mostrar y propender al uso de la diversa gama de herramientas para resolver problemas matemáticos y de diseño, sean estas tradicionales y/o digitales, como fortalecedoras del aprendizaje y de la creatividad.
- ∞ Promover, en la medida de lo posible, la autogestión del conocimiento, utilizando para ello las nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

-OBJETIVOS PARTICULARES:

- ∞ Orientar la instrumentación para hacer de la Matemática una asignatura de aplicación, que permita a través del razonamiento lógico-deductivo y el manejo adecuado de la formalización matemática, su simbología y los distintos lenguajes que en ella intervienen, la resolución de problemas relacionados con la Arquitectura, el Urbanismo y el diseño en general.
- ∞ Propender al anclaje de conocimientos entre Matemática IA y IIA a través de aplicaciones sencillas que refuercen y refresquen los contenidos ya aprendidos y propongan un acercamiento a las tres dimensiones.
- ∞ Incentivar el estudio de la Geometría Analítica plana y espacial en este nivel de cursado (Nivel III), con el entendimiento que el arquitecto diseña espacios habitables cuyo estudio, definición y posición, comprensión y cálculo se facilita si se asocia a un sistema de referencias adecuado.
- ∞ Desde la Geometría Analítica del Espacio, estimular al descubrimiento de aspectos geométricos, y propuestas de soluciones imaginativas que surjan del análisis de múltiples obras aportadas por arquitectos destacados en las que estén presentes especialmente las secciones cónicas y las superficies cuádricas, tratando que contribuyan al desarrollo de la imaginación y el sentido común transferibles a diseños propios.
- ∞ Aprovechar los recursos tecnológicos, programas CAD y software Matemático, para el descubrimiento, la comprensión, la profundización y la ampliación de los conocimientos matemáticos y para relacionar estos conocimientos con otros de las distintas áreas de la currícula, especialmente las relacionadas específicamente con proyectos de Arquitectura.
- ∞ Proponer la elaboración de problemas concretos por parte del alumno y su resolución, que él invente, imagine o descubra situaciones problemáticas a resolver mediante la Geometría y la Matemática aplicadas a la Arquitectura y el Diseño generando aportes para sus compañeros y la Cátedra.

MATEMÁTICA IIA

PROGRAMA SINTÉTICO

Del Plano al Espacio:

Geometría analítica en dos y tres dimensiones.

Sistemas de Coordenadas 2D y 3D:

Del Plano al Espacio:

Secciones Cónicas:

Cónicas cerradas y abiertas

**Circunferencia, elipse, hipérbola
parábola.**

**Superficies en el espacio. Aplicación de
Sistemas Digitales en la generación de
superficies y volúmenes.**

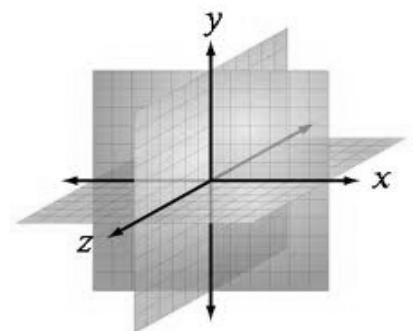
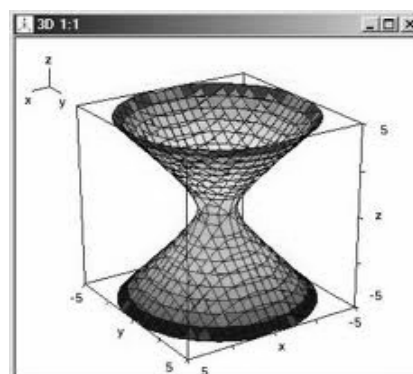
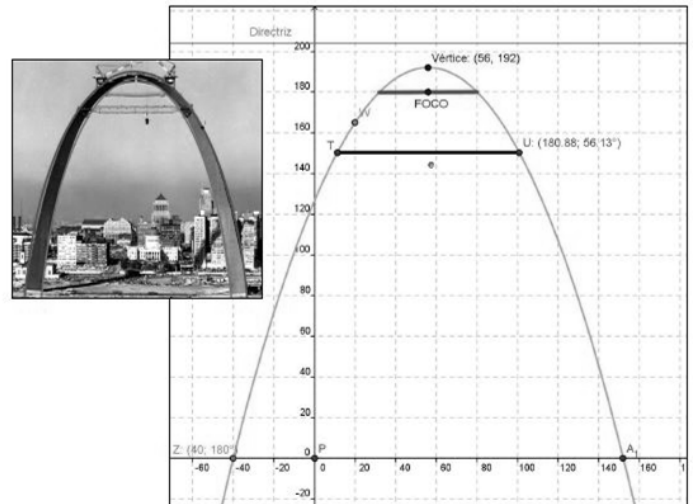
**Superficie Esférica, Elipsoides,
Hiperboloides, Paraboloides. El Plano**

Los contenidos del Programa se ajustan a los contenidos curriculares básicos según el plan de Estudios vigente (Plan 2007).La Bibliografía básica y complementaria se encuentra disponible en el Aula Moodle de la Cátedra (Uncavim10).

Referencias imágenes:

<https://www.gaussianos.com/representar-superficies-en-tres-dimensiones/>

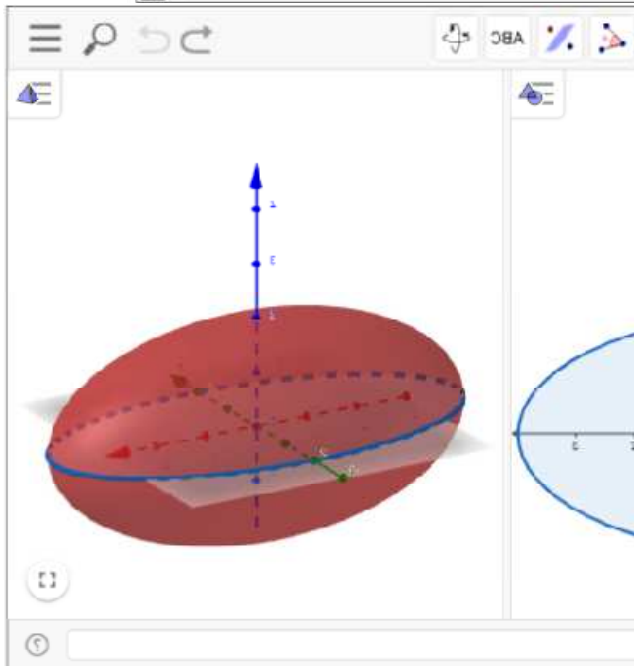
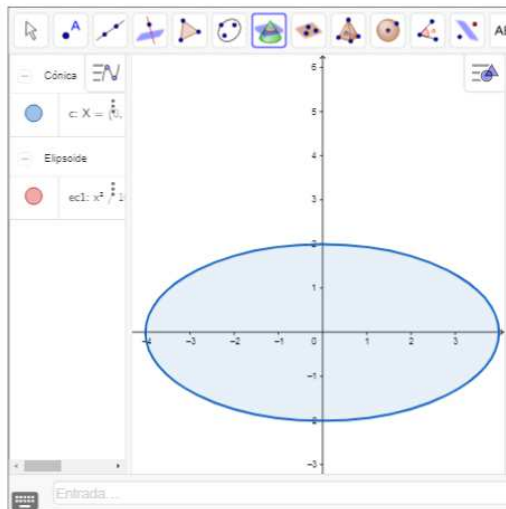
https://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_coordenadas



GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA Y ESPACIAL

INTRODUCCIÓN
por CLARISA LANZILLOTTO

GeoGebra



El desarrollo de cada unidad incorpora una Introducción teórica y EJERCICIOS a resolver ordenados de menor a mayor complejidad.

Los resultados se encuentran al final de cada tema.

Te sugerimos LEER CON ATENCIÓN la síntesis teórica, RESOLVER cada una de las aplicaciones de forma completa, prolija y ordenada y realizar los gráficos con precisión, a escala adecuada, usando útiles de geometría.

Recomendamos utilizar Geogebra para verificar, graficar y comprender mejor las figuras y superficies en el espacio.

<https://www.geogebra.org/m/KGWhcAqc>

RECUERDA QUE EN EL AULA MOODLE DE MATEMÁTICA IIA HAY MATERIAL QUE AMPLÍA LA TEORÍA DE CADA TEMA. TAMBIÉN ENCONTRARÁS NOVEDADES, EJERCITACIÓN, VIDEOS, AUTOEVALUACIONES Y FOROS DE CONSULTA.

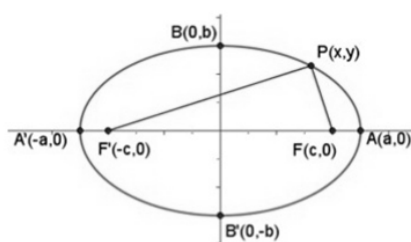
La Geometría Analítica, es una rama de la Geometría, iniciada por el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) que tiene por objeto el estudio de las propiedades geométricas de las figuras por medio del álgebra, e inversamente se ocupa del estudio de las ecuaciones mediante sus representaciones gráficas.

El nexo entre **el álgebra y la geometría** se establece a través de los sistemas de coordenadas, que son varios, siendo el Cartesiano el más conocido.

En Geometría Analítica, cuando nos referimos a **LUGAR GEOMÉTRICO**, aludimos al **gráfico de una ecuación**, que contiene todos los puntos y sólo aquellos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada. Hace referencia a un conjunto de puntos del plano o el espacio que cumplen una determinada propiedad. Por ejemplo:

La elipse es el
lugar geométrico
de todos los
puntos de un
plano, tales que
la suma de las
distancias a otros
dos puntos fijos
llamados focos es
constante.

ELIPSE



<https://image.slidesharecdn.com/conicas-140210161619-phpapp02/95/conicas-12-638.jpg?cb=1392049177>

Las dos cuestiones fundamentales de la geometría analítica son:

- Dado el lugar geométrico de un sistema de coordenadas, obtener su ecuación.
- Dada la ecuación en un sistema de coordenadas, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que verifican dicha ecuación.

LOS SISTEMAS DE COORDENADAS en el plano y en el espacio:

Son sistemas de referencias, formados por ejes (en el caso de Sistemas de Coordenadas en el plano) o por ejes y planos (en el caso de Sistemas de Coordenadas en el espacio). En cada sistema se puede determinar la posición de un punto cualquiera mediante las distancias del punto al origen, a los ejes o a los planos coordenados. Cada punto se posiciona según sus coordenadas. Las mismas pueden ser números positivos o negativos o ángulos.

Para representar puntos de coordenadas conocidas, es conveniente adoptar una ESCALA adecuada sobre cada uno de los ejes de referencia.

Los sistemas gráficos (CAD), utilizan diferentes sistemas de coordenadas para la representación de los puntos en pantalla.

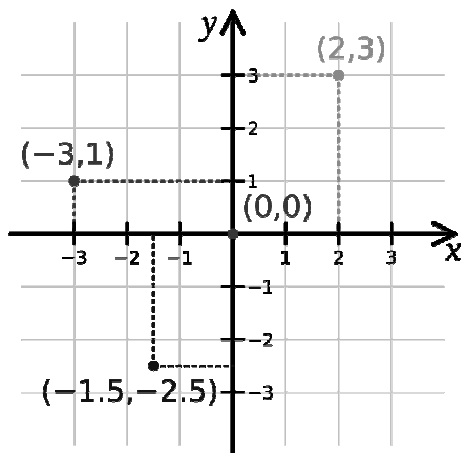
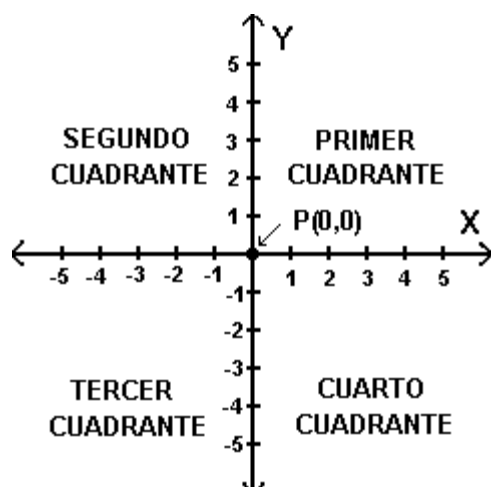
En Nivel I, en Matemática IA, estudiamos la Geometría Analítica Plana donde los puntos se consideran situados en un solo plano, el plano coordenado, el plano cartesiano. En este curso posicionaremos allí las llamadas secciones cónicas: **circunferencia, elipse, parábola e hipérbola** cuyo estudio detallado se hará en los siguientes capítulos.

A modo de repaso, recordamos que en **Geometría Analítica Plana** se estudian dos sistemas de Coordenadas: El Sistema Cartesiano o Rectangular y el Sistema Polar. Los gráficos que siguen sintetizan los elementos y la posición de un punto en ambos Sistemas.

PARA AMPLIAR CONOCIMIENTOS sobre SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL PLANO RECURRE AL APUNTE QUE ENCONTRARÁS EN EL AULA VIRTUAL DE LA CÁTEDRA.

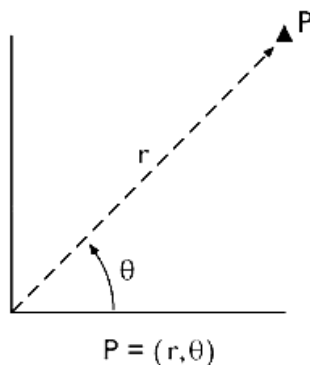
Sistema de coordenadas Cartesianas

P (x;y) abscisa y ordenada

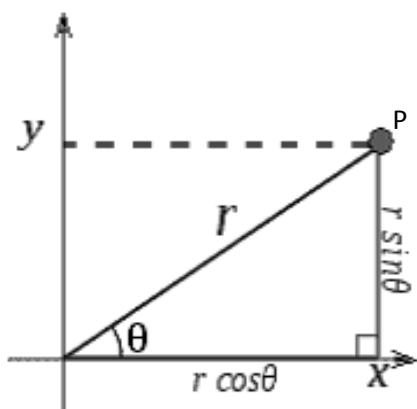


Sistema de Coordenadas Polares

P (r ; θ) radio vector y ángulo



Relación entre el Sistema Cartesiano y el Sistema Polar



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

P

Se obtienen relaciones muy simples cuando el Polo y el Eje Polar del sistema Polar se hacen coincidir con el Origen y la porción positiva del eje "x" del sistema Cartesiano.

Consideramos al punto P de coordenadas polares $(r; \theta)$, y cartesianas $(x; y)$.

Las dos primeras relaciones nos permiten calcular las coordenadas cartesianas de un punto conociendo las coordenadas polares del mismo. Las otras dos relaciones, las coordenadas polares del punto dado, cuando conocemos sus coordenadas cartesianas.

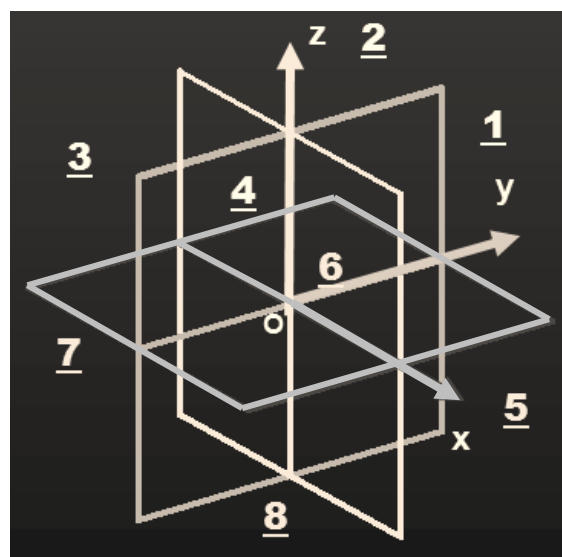
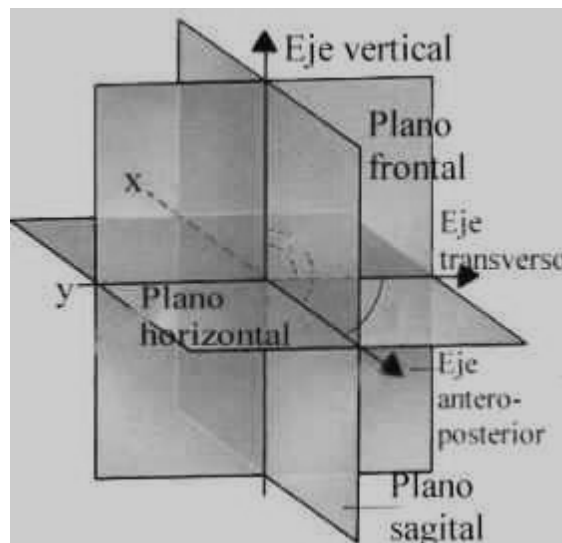
En el espacio, la posición de un punto requiere de otra dimensión además de las dos dimensiones del sistema coordenado plano. Por tanto, en la Geometría Analítica espacial, las relaciones y propiedades geométricas contienen en general tres variables.

La posición de un punto se refiere en relación a tres planos perpendiculares entre sí y que se cortan en un punto común. Son **los planos coordenados XY, XZ e YZ** que definen el espacio geométrico.

Las rectas de intersección de los planos coordenados son **los ejes x, y, z** que se llaman **ejjes coordenados** y cuyo sentido positivo se indica mediante flechas. El punto **O** es el origen de referencia de cada uno de los tres ejes.

Los **planos coordenados** dividen el Espacio en **ocho octantes**: el octante 1 está limitado por los semiejes positivos ox , oy , oz ; los octantes 2, 3 y 4 son los situados por encima del plano coordenado XY y numerados en sentido contrario a las agujas del reloj. Los octantes 5, 6, 7 y 8 están situados por debajo del plano XY correspondiendo el 5 con el 1, el 6 con el 2; el 7 con el 3 y el 8 con el 4.

En el espacio se posicionan puntos, figuras, cuerpos y superficies. En este curso posicionaremos superficies regladas, como EL PLANO, y superficies curvas como LA SUPERFICIE ESFÉRICA, LOS ELIPSOIDES, LOS HIPERBOLOIDES DE UNA HOJA Y DE DOS HOJAS Y LOS PARABOLOIDES. El estudio particularizado de las mismas se hará en los próximos capítulos.

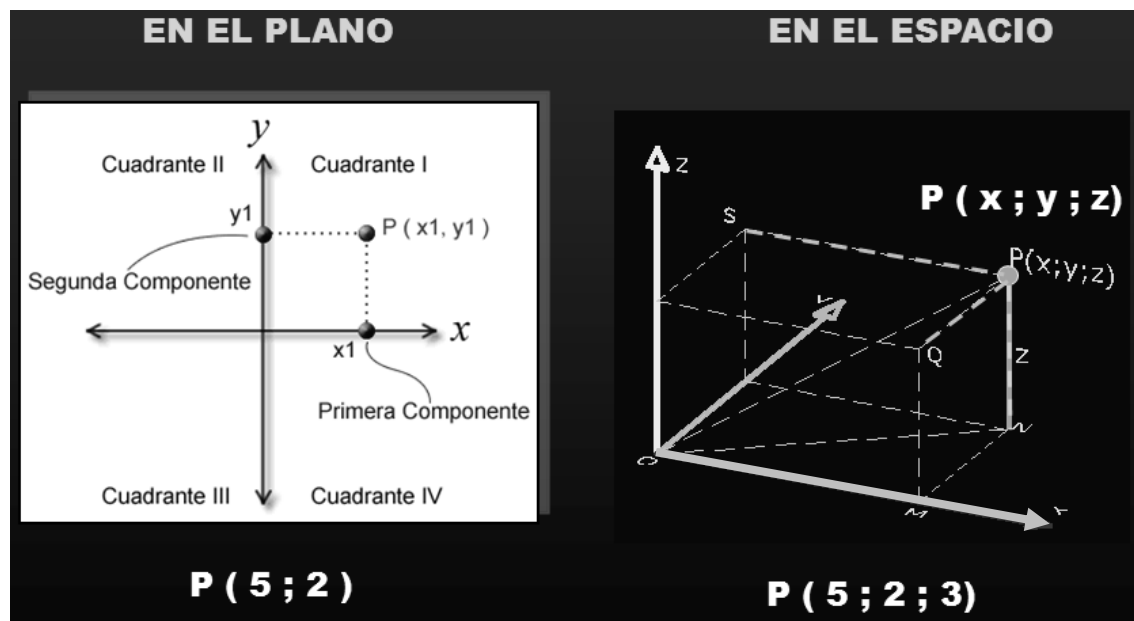


Para posicionar las entidades geométricas en el espacio, se estudian 4 Sistemas de referencia:

Sistemas de coordenadas en el espacio			
● Coordenadas Cartesianas ● $P(x; y; z)$		● Coordenadas Cilíndricas ● $P(\rho; \theta; z)$	
● Coordenadas Polares ● $P(\rho; \alpha; \beta; \gamma)$		● Coordenadas Esféricas ● $P(\rho; \alpha; \beta)$	

La imagen muestra el nombre del Sistema y las coordenadas que refieren la posición de un punto en cada uno de ellos. Seguidamente, de manera sintética, haremos referencia a cada uno, tomando como ejemplo al punto **P** en el espacio.

Sistema de coordenadas Cartesianas:



En Geometría Analítica Plana estudiamos que cada punto refiere su posición en el Sistema cartesiano según un par ordenado (x;y) que son la abcisa y la ordenada del punto, en este caso P(5;2).

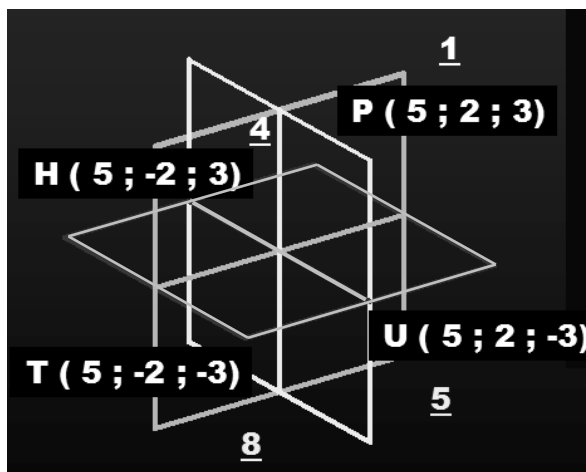
En el espacio cada conjunto de tres números dados en un cierto orden (primero **x**, después **y**, finalmente **z**) permite establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y los conjuntos ordenados de tres números que son **las coordenadas de esos puntos**.

En la figura superior, los segmentos SP, QP y NP refieren la posición del punto P respecto de los planos coordenados XY, XZ e YZ. Las coordenadas cartesianas de P son respectivamente las coordenadas **x, y, z**, abcisa, ordenada y cota y se representan por **P(x, y, z)**. Cada coordenada cartesiana de un punto en el espacio es un número positivo o negativo. En el ejemplo, las coordenadas de P **son números positivos: P (5;2;3)**, lo que indica que P se encuentra en el primer octante del espacio cartesiano.

Las coordenadas cartesianas de los puntos H, T y U indican que están posicionados en el octante 4, 8 y 5 respectivamente.

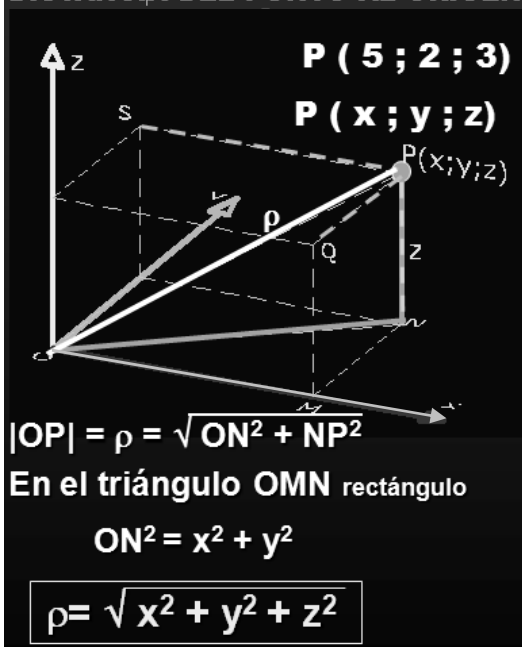
Puede establecerse que:

- Los puntos sobre el eje x tienen coordenadas (x, 0, 0)
- Los puntos sobre el eje y tienen coordenadas (0, y, 0)
- Los puntos sobre el eje z tienen coordenadas (0, 0, z)



En el sistema Cartesiano en el espacio podrá calcularse la distancia de un punto al origen, la distancia entre 2 puntos dados y las coordenadas del punto medio de un segmento.

DISTANCIA DEL PUNTO AL ORIGEN



Se toma como ejemplo el punto $P(5; 2; 3)$. Se observa en la imagen que para resolver la distancia del punto al origen del Sistema Coordenado (ρ o también r) y la distancia entre dos puntos, en este caso distancia $|AB|$ debemos retomar los conocimientos adquiridos en Matemática IA. Resolución de triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras.

Punto Medio de un Segmento:

Las coordenadas cartesianas del punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ son: $P_m(x; y; z)$ que se obtienen por la semi suma de las coordenadas cartesianas del mismo nombre de los puntos dados, en este caso puntos A y B.

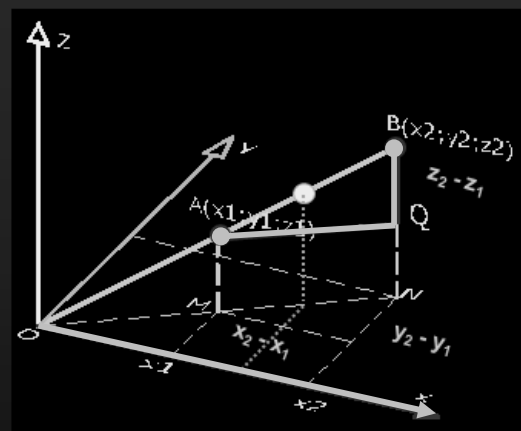
Distancia entre dos puntos

$$|AB| = \sqrt{(MN)^2 + (BQ)^2}$$

$$BQ^2 = (z_2 - z_1)^2$$

$$MN^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



Punto Medio de un Segmento

Las coordenadas del punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ son: $P_m(x; y; z)$

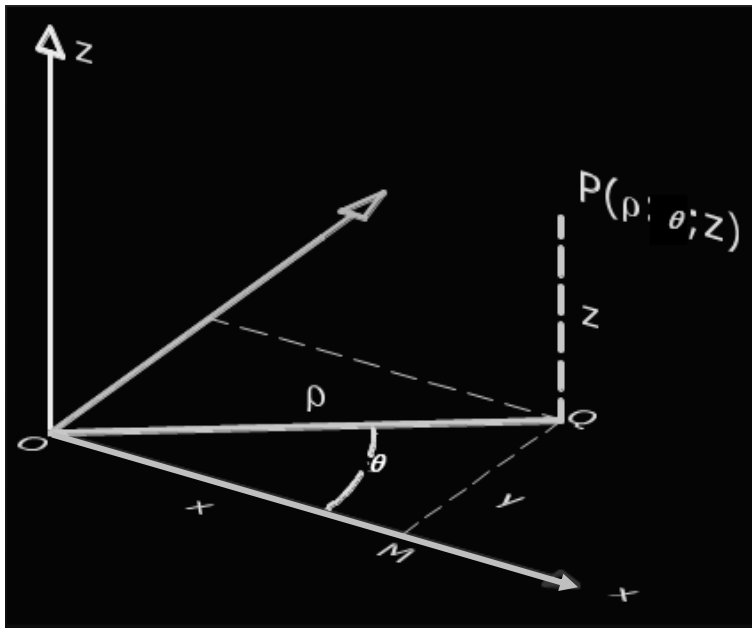
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Sistema de coordenadas cilíndricas:

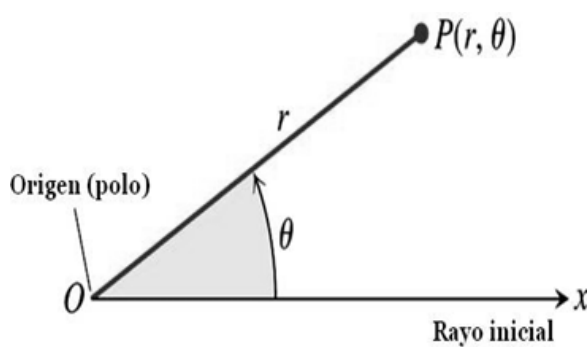
En la imagen que sigue puede observarse que las coordenadas cilíndricas de un punto, en ese caso P, son las coordenadas polares de la proyección Q del punto P sobre el plano XY. Las coordenadas del punto P se escriben entre paréntesis y en el siguiente orden $(\rho; \theta; z)$, o $P(r; \theta; z)$.



ρ o r : distancia de la proyección del punto P sobre el plano coordenado XY .

θ o α : ángulo que forma OQ con el semieje positivo de las abscisas.

z : cota del punto.

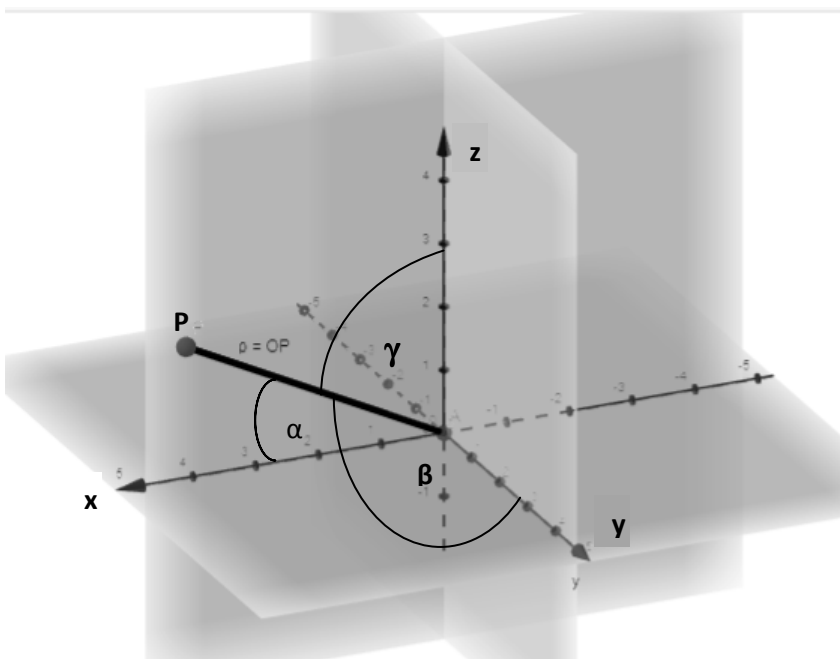


Hay una relación intrínseca entre el Sistema de Coordenadas Polares en el plano y el Cilíndrico en el espacio.

Sistema de coordenadas Polares en el espacio:

Se hace esta aclaración para evitar la confusión con el Sistema Polar en el plano.

Las coordenadas polares de un punto P del espacio son $(\rho; \alpha; \beta; \gamma)$ siendo ρ la distancia OP y α , β , y γ los ángulos de la dirección de OP .



Los ángulos directores α , β , y γ son los que forma la recta que contiene a OP con el eje x , el eje y y el eje z respectivamente, como muestra la imagen superior realizada en Geogebra.

Los cosenos de esos ángulos se denominan cosenos directores, sabiendo que:

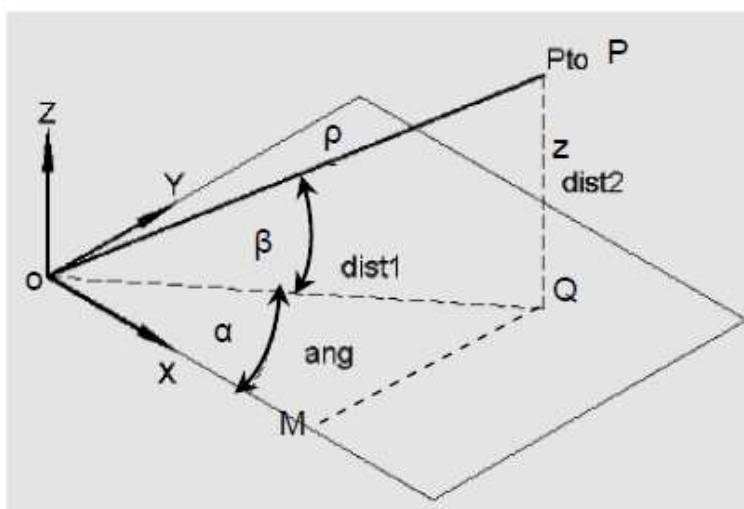
$$\cos \alpha = x / \rho$$

$$\cos \beta = y / \rho$$

$$\cos \gamma = z / \rho$$

Sistema de coordenadas Esféricas:

Las coordenadas esféricas de un punto, tal como P se escriben entre paréntesis y en el siguiente orden $P(\rho ; \alpha ; \beta)$.



ρ = distancia del punto al origen (como en las coordenadas polares en el espacio)

α = ángulo que forma el segmento OQ con el semi-eje positivo "x" (igual que en las coordenadas cilíndricas)

β = ángulo de elevación o depresión respecto al plano XY

En los sistemas CAD se utilizan diferentes sistemas de coordenadas para la introducción de los puntos en pantalla. AutoCad (Software de aplicación orientado al diseño) dispone de los sistemas de coordenadas para el ingreso de datos y generación de dibujos en la pantalla:

Cartesianas y Polares en el plano para los trabajos en 2D (bidimensional)

Cartesianas en el espacio, Cilíndricas y Esféricas para la creación de gráficos 3D (tridimensional).

RELACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

Al inicio estudiamos que, en el espacio, si uno o más puntos están posicionados según sus coordenadas cartesianas x ; y ; z es posible calcular distancias de los puntos al origen del sistema, distancia entre dos puntos, coordenadas cartesianas del punto medio de un segmento.

Si los puntos están posicionados según otros sistemas de referencia, estas operaciones no podrán realizarse hasta tanto no se establezcan las coordenadas cartesianas de los puntos en cuestión. Por ello se expresan aquí las relaciones que ligan las coordenadas cartesianas con los otros sistemas.

1-RELACIONES ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS o RECTANGULARES Y CILÍNDRICAS



$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z \quad \text{Cilíndricas } a \Rightarrow \text{Cart. Rectang.}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad z = z \quad \text{Cart. Rectang. } a \Rightarrow \text{Cilíndricas}$$

2-RELACIONES ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS o RECTANGULARES Y POLARES EN EL ESPACIO:

$$x = \rho \cos \alpha \quad y = \rho \cos \beta \quad z = \rho \cos \gamma \quad \text{Polares } a \Rightarrow \text{Cart. Rectang}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\rho} \quad \beta = \arccos \frac{y}{\rho} \quad \gamma = \arccos \frac{z}{\rho} \quad \text{Cart. Rectang } a \Rightarrow \text{Polares}$$

3-RELACIONES ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS o RECTANGULARES Y ESFÉRICAS

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \beta \cos \alpha \\ y &= \rho \cos \beta \sin \alpha \\ z &= \rho \sin \beta \end{aligned}$$

$$\text{Coord. Esféricas } a \Rightarrow \text{Cart. Rectang.}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\beta = \arcsin \frac{z}{\rho}$$

$$\text{Cart. Rectang. } a \Rightarrow \text{Coord. Esféricas}$$

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x}$$

PARA AMPLIAR CONOCIMIENTOS sobre SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO RECURRE AL APUNTE QUE ENCONTRARÁS EN EL AULA VIRTUAL DE LA CÁTEDRA. TODAS LAS FÓRMULAS QUE PERMITEN PASAR LAS COORDENADAS DE UN PUNTO, DE UN SISTEMA A OTRO, TAMBIÉN SE ENCUENTRAN EN EL CUADERNILLO DE FÓRMULAS DE APLICACIÓN

SISTEMAS DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES

por
MIRTA HEREDIA

Curiosidad

Enfermo en su cama meditaba sobre filosofía y matemática cuando René Descartes observaba ingenuamente el vuelo de una mosca, sin imaginar las implicancias que este hecho iba a tener en la evolución del Conocimiento de la Humanidad.

Teniendo su vista perdida en el techo de la estancia fue una mosca a cruzarse en su mirada, cosa que hizo que la siguiera con la vista durante un buen rato, mientras pensaba y se preguntaba si se podría determinar a cada instante la posición que tendría el insecto, por lo que pensó que si se conociese la distancia a dos superficies perpendiculares, en este caso la pared y el techo, se podría saber. A estas distancias las llamó coordenadas del punto y con esto acababan de nacer las Coordenadas Cartesianas, y con ellas, la Geometría Analítica.

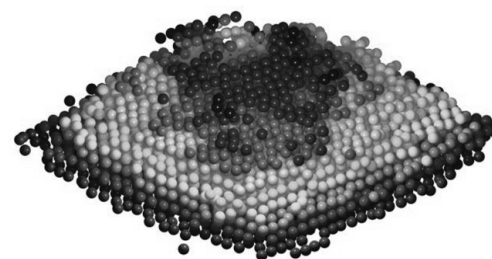
A través del tiempo y en el desarrollo de las aplicaciones que estos conceptos aportaron, hoy nos sorprende cómo se potenció la utilización de este discernimiento, madurando y creciendo en otros de mayor complejidad.

APLICACIONES SEGÚN DISTINTAS DISCIPLINAS:

En FÍSICA

Los científicos han conseguido utilizar potentes microscopios, para observar las posiciones tridimensionales de átomos individuales con gran precisión.

Las observaciones hechas por el equipo dirigido por Jianwei (John) Miao de la Universidad de California, han podido inferir sobre las propiedades macroscópicas de los materiales, a partir de conocer la disposición estructural de cada uno de sus átomos; lo que permite conocer el comportamiento de los materiales ante diferentes solicitaciones, con la máxima fiabilidad posible sobre su integridad estructural.



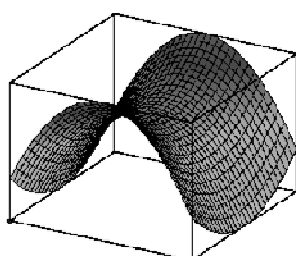
En MEDICINA

Progresan a pasos agigantados la Estereotaxia, técnica médica moderna que permite evitar “grandes” cirugías en la cabeza, y sólo a través de este avanzado equipo explorar y extraer agentes ajenos o tumores en el cráneo apenas por un pequeño orificio. Con un sofisticado uso de las Coordenadas se aporta a la neurología un amplio campo de actividades:

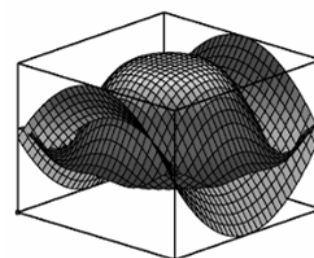
Se realizan con esta aparatología Biopsias, Cirugías Guiadas, Implantación de Catéteres, Tratamiento del Dolor, Tratamiento de los Disturbios del Movimiento, Neuroendoscopias, Implantación de Electrodo Profundos, Tratamiento de la Epilepsia, etc.



En MATEMÁTICA



Máxima es uno de los software que tiene la posibilidad, vía programas externos, de producir GRÁFICOS DE FUNCIONES EN 2 Y 3 DIMENSIONES. También puede producir gráficos a partir de una tabla de puntos. Actualmente pueden

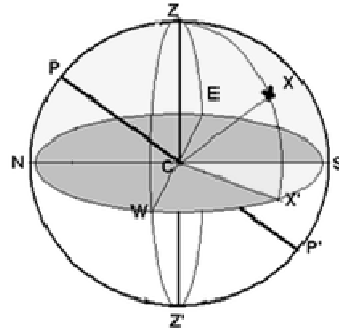


utilizarse como programas externos **openmath**, (identificado también como **xmaxima**). Otros programas como el **grasshopper**, el **geogebra** permiten generar y visualizar figuras en el plano y en espacio, facultando su comprensión y manejo de formas complejas.

En ASTRONOMIA

Como sabemos las Coordenadas Celestes son ese conjunto de valores que de acuerdo con un determinado Sistema de Referencia dan la posición de un objeto en la ESFERA CELESTE. Existen diversas coordenadas celestes según cual sea su origen y planos de referencia. Una primera clasificación, las divide en dos grandes grupos, según se traten de Coordenadas Cartesianas o Coordenadas Esféricas.

De ellas se valen los científicos para jerarquizar y evolucionar estudios que arriban hoy, por ejemplo a descubrir que hay filtraciones de agua y extensos depósitos sedimentarios en Marte, o por ejemplo que se supera el centenar de planetas extrasolares.

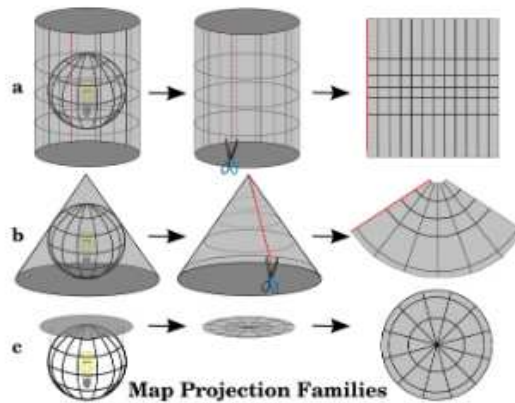


En CARTOGRAFIA

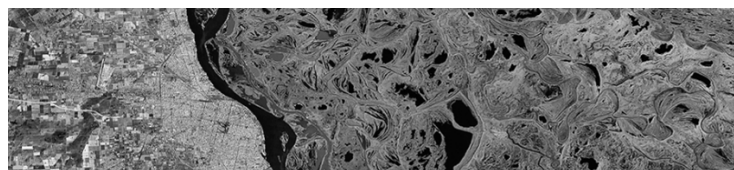
Cuando se observa de cerca, la Tierra parece ser relativamente plana. Sin embargo, cuando se observa desde el espacio, podemos ver que es relativamente esférica, entonces para poder representarla los cartógrafos han desarrollado un conjunto de técnicas llamadas **proyecciones cartográficas** diseñadas para mostrar, con una precisión razonable, la Tierra esférica en dos dimensiones, de todos modos se plantean algunos inconvenientes, cuanto mayor es la escala, mayor es el margen de error que se puede corregir si manteniendo la escala, escogemos un área menor de representación.

Hay tres familias de proyecciones cartográficas

En el proceso de crear mapas cartográficos se puede imaginar cómo colocar una fuente de luz dentro de una esfera transparente en la que las zonas terrestres son opacas. Entonces, se proyectan los contornos en una hoja bidimensional de papel. El papel imaginario se puede colocar de distintas formas alrededor del globo; **cilíndrica**, **cónica** o incluso como una superficie **plana**. Cada uno de estos métodos produce lo que se denomina **familia de mapas cartográficos**.



Hoy en día, el proceso de proyectar la esfera terrestre sobre el papel se realiza utilizando los principios matemáticos de la geometría, la trigonometría, y actualmente la cartografía de imagen utiliza las imágenes captadas por la cámara digital



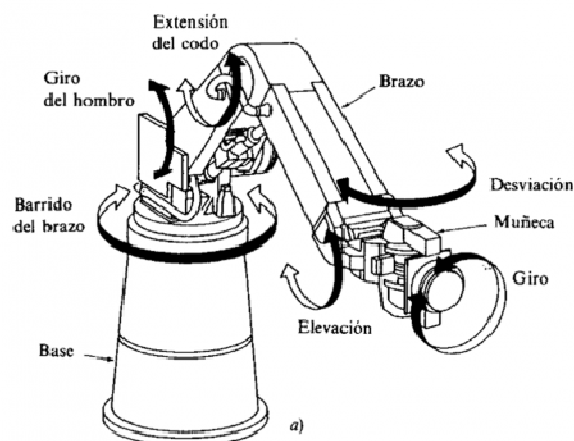
UltracamXp de alta resolución a bordo de un avión y las imágenes de los satélites SAC-C, Landsat 5, Landsat 7 y Spot 5. El área que cubre cada carta está directamente relacionada con las cartas topográficas a distintas escalas que es también la base cartográfica para la georeferenciación de las imágenes.

En ROBOTICA

El robot "manipulador multifuncional reprogramable" manipula sustancias nocivas para el ser humano, realiza tareas domésticas científicas o industriales como soldaduras, pintura, mecanizado, montaje, formación e investigación, etc.

A raíz de los 4 o más grados de libertad que el robot realiza en sus articulaciones, se puede entrar en la definición de las coordenadas que se usan para definir los movimientos del robot. Hay dos tipos que se distinguen:

- **Coordenadas robot:** Son aquellas referidas a cada una de las articulaciones del robot. Son las asociadas a los pares angulares o rotativos.
- **Coordenadas cartesianas:** Están referenciadas a un triedro rectángulo situado en la base del robot y pueden ser expresadas en dimensiones geométricas lineales o angulares.



Elementos básicos de un brazo robot.

En DISEÑO

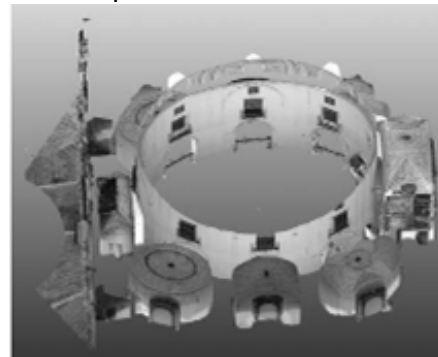
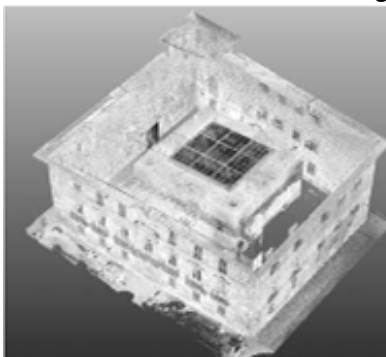
Desde los modestos ejercicios presentados en este capítulo, que aproximan el uso de las Coordenadas a la Arquitectura, pasando por su aplicación en los diferentes graficadores digitales que admiten el diseño y visualización del objeto proyectado, por ejemplo con:

Microsoft Paint, XnView, Adobe Illustrator, Google Sketchup, Irfanview, ACDSee Pro, Gimp, Corel Draw, Google Picasa, y por supuesto Autocad con todas las opciones que presenta y enriquecen el producto final graficado.

Y como si esto no alcanzara se propone la posibilidad de trabajar con NUBES DE PUNTOS: es el resultado del escaneo láser en 3D del objeto, consistente en un conjunto de vértices referidos a un sistema de coordenadas tridimensional, y normalmente se definen estos vértices mediante coordenadas X, Y y Z.

Dicha información se considera como punto de partida para extraer posteriormente otras como alzados, secciones, modelos 3D, ortoimágenes, aplicaciones de visualización, animación, renderizado, etc.

La nube puede ser realizada tanto en escala de grises, empleando el valor de reflectancia registrado por el láser como en color, integrando la información de color del kit color. Este levantamiento de la Obra podrá luego ser recorrida, estudiada, pre visualizada y corregida en el mismo Proceso de Diseño.



Desde Descartes a nuestros días, con el inconmensurable aporte de los científicos, técnicos y pensadores, el CONOCIMIENTO crece vertiginosamente rumbo a destinos inciertos y promisorios de grandeza.



REFERENCIAS:

<https://noticiasdelaciencia.com/art/16156/determinan-por-vez-primera-las-posiciones-tridimensionales-de-atomos-individuales>

<https://www.deustoformacion.com/blog/disenio-produccion-audiovisual/herramientas-3d-autocad>

<https://webs.um.es/mira/maxima/GraficosMaxima.html>

www.juiceanalytics.com/chartchooser

<https://pixelcoblog.com/10-poderosos-recursos-para-graficar-datos/>

<https://www.clickprinting.es/blog/programas-de-diseno-grafico-mas-populares>

https://www.google.com/search?q=que+es+la+estereotaxia+en+mamografia&rlz=1C1NHXL_e_sAR719AR720&oq=que+es+la+estereotaxia&aqs=chrome.1.69i57j0l3.18132j1j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8

<https://docplayer.es/84835128-Soluciones-gim-geomatics-para-arquitectura.html>

<https://blogs.20minutos.es/yaestaellistoquetodolosabe/descartes-la-mosca-y-las-coordenadas-cartesiana/>



APLICACIONES

SISTEMAS DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES

por
MIRTA HEREDIA

1) Dados los siguientes puntos en el espacio :

A(3; 5; 1)

B(-2; -5; -3)

C(-4; 8; -6)

D(7; -1; -5)

E(-6; -2; 5)

F(4; -5; 3)

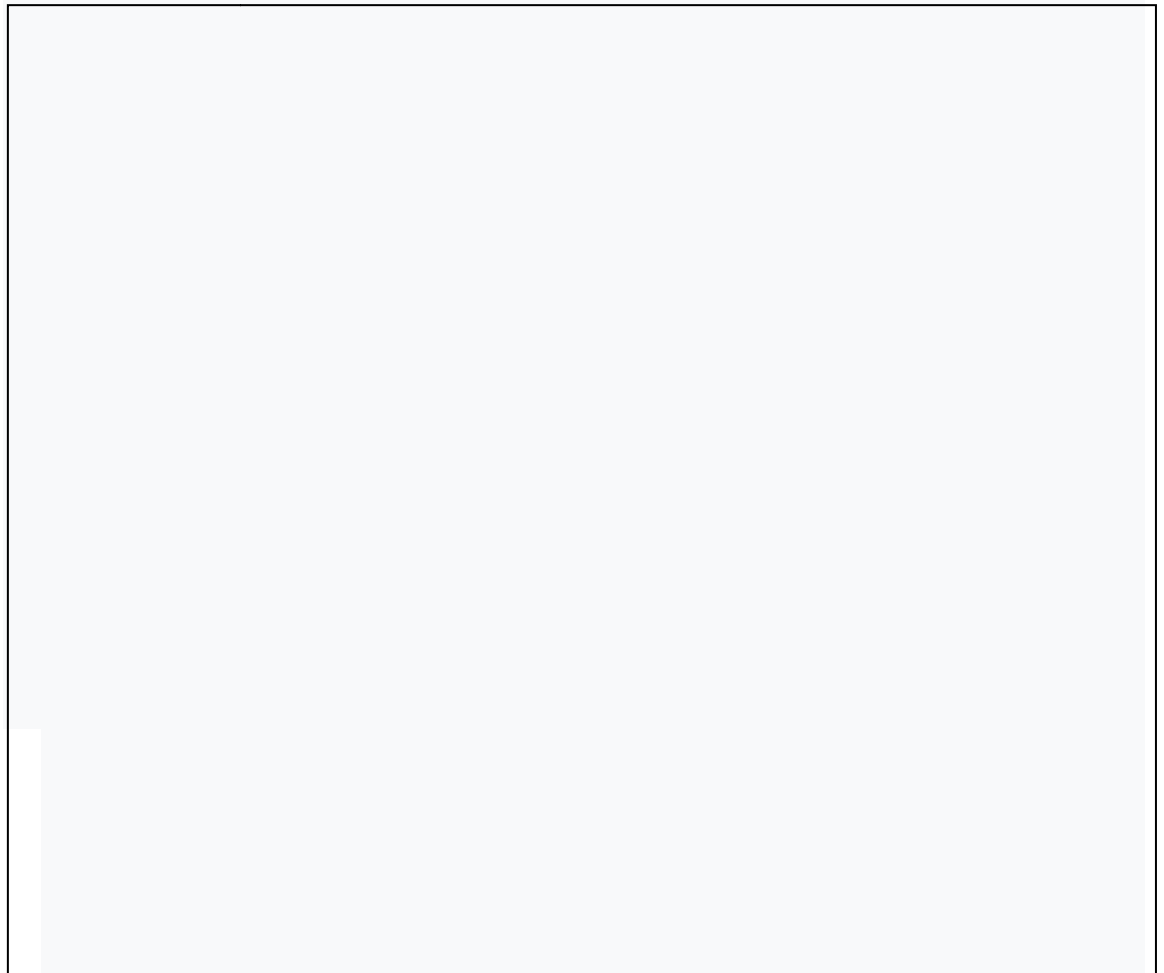
G(-2; 8; 5)

H(5; 6; -4)

a-En qué octantes se encuentran?

b-Graficar los puntos en un Sistema de Coordenadas Cartesianas Tridimensionales.

Realizar el gráfico en el espacio indicado



2) Los vértices de una losa triangular son los puntos **A, B y D**, (datos del ejercicio anterior)

a-Completar el gráfico del ejercicio anterior uniendo dichos puntos.

b. Calcular las distancias **AB, BD y DA**.

c- Calcular **el área**, en m^2 , de la losa triangular

d- Calcular **el perímetro**, en metros, de dicha losa.



3) Calcular **las coordenadas cartesianas de los puntos medios** de AB, BD, y DA y definir en qué octantes se encuentran. Graficar dichos puntos en el gráfico anterior.

4) Dado el punto G(-2; 8; 5) posicionado en el espacio según sus coordenadas cartesianas:

- a- ¿Cuáles son **las coordenadas cartesianas del punto medio del segmento OG** que une el origen del sistema de coordenadas y el punto G?
- b- ¿Cuáles son los ángulos directores de **OG**? Dar el valor de cada ángulo en grados, minutos y segundos sexagesimales.

5) Basándonos en el Teorema Fundamental que dice que:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ proponemos en nuestro caso que

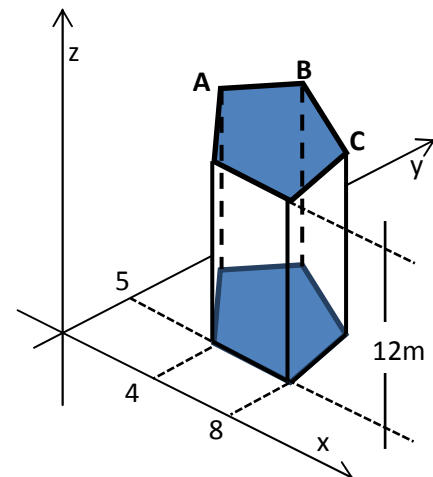
$0,23 + 0,36 + 0,41 = 1$. Considerando que esos valores pertenecen a los cuadrados de los cosenos de los ángulos directores de un segmento designado como OP. Es necesario saber:

- a. ¿Cuáles es el valor de ángulos directores del segmento OP si **$\rho = 9^\circ$** ?
- b. ¿Cuáles son las **Coordenadas Cartesianas del punto P**?

- 6) Con distintos instrumentos de medición se obtuvieron diferentes coordenadas referidas a la posición de distintos puntos en el espacio.
- ¿Qué Coordenadas Cilíndricas tiene el punto E $(-4; -3; -5)$?
 - A qué distancia se encuentra del punto I $(\sqrt{29}, 21^\circ 48' 5,07''; 8)$ respecto al origen del Sistema (**segmento OI**).
 - En qué Octante se encuentra el Punto medio entre E e I.
 - Graficar los puntos en un sistema de coordenadas espaciales.

- 7) Surgió entre los calculistas una duda de medición.
- El Tablero Eléctrico de Derivación que se encuentra en J $(\sqrt{20,75}; 113^\circ 11' 54,93''; 33^\circ 17' 10,27'')$ ¿es **Punto Medio** entre los Tableros Secundarios ubicados en L $(\sqrt{40}; 161^\circ 33' 54,18''; -4)$ y M $(\sqrt{115}; 73^\circ 45' 16,67''; 62^\circ 12' 31,3''; 32^\circ 56' 18,74'')$? Calcule y justifique la respuesta.
 - ¿A qué distancia están estos gabinetes del Tablero General que se ubica en N $(2; -6; 4)$?

- 8) Calcular las **Coordenadas Polares** en el espacio del vértice A, las **Coordenadas Esféricas** del vértice B y las **Coordenadas Cilíndricas** del vértice C del prisma pentagonal regular que muestra el gráfico.



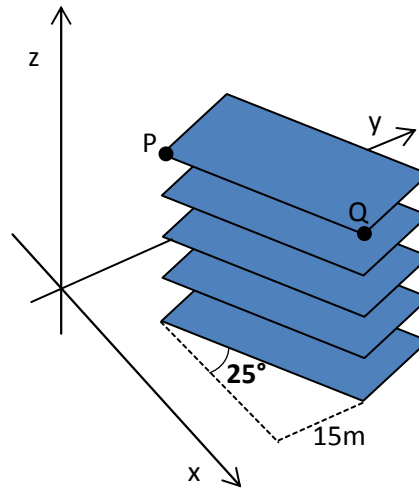
9) En un edificio de Propiedad Horizontal se desea saber:

a-¿Cuál es **la altura del mismo (en metros)** sabiendo que es un prisma recto de base rectangular?

b-¿Cuál es **su longitud (segmento PQ)**?

c-¿Qué **coordenadas polares en el espacio** tiene el punto Q?

Dato: $P(\sqrt{274}; 37,8749^\circ; 46,4643^\circ)$.



10) Un punto en el espacio dista del Origen del Sistema de Coordenadas Cartesianas una distancia $\approx 11,66190379$, formando el segmento OP. El mismo forma con el eje “x” el ángulo director $\alpha = 69^\circ 56' 25,5''$, y con el eje “y” el ángulo directo $\beta = 59^\circ 2' 10,48''$. Se pide calcular **el valor del restante ángulo director γ** .

Graficar el punto en un sistema espacial y en **Coordenadas Cartesianas**.

11) El Centro de una esfera tiene Coordenadas Cartesianas $C(3; -5; 8)$.

Calcular las **Coordenadas Polares, Esféricas y Cilíndricas** del Centro y de su Polo-Sur, sabiendo que el radio de la esfera es de 4 m. Graficar los puntos en un sistema coordenado cartesiano espacial.

12) Un museo regional anexa un pabellón con formas curvas similares a las de StudyWeil, como se ve en la fotografía, <http://blog.bellostes.com/?p=629> y se implanta en el terreno según los siguientes puntos:



V($\sqrt{90}$; 108°26'5,82"; 3,5),

T($\sqrt{50}$; 98°7'48,37"; 3,5),

D($\sqrt{110}$,25; 341°33'54,18"; 25°22'36,96"); punto de inflexión de la curva

I($\sqrt{166}$,25; 335°33'21,76"; 20°25'35,29"), punto de inflexión de la curva

J($\sqrt{680}$,25;16°33'30,02";101°3'8,5";77°49'34,58")

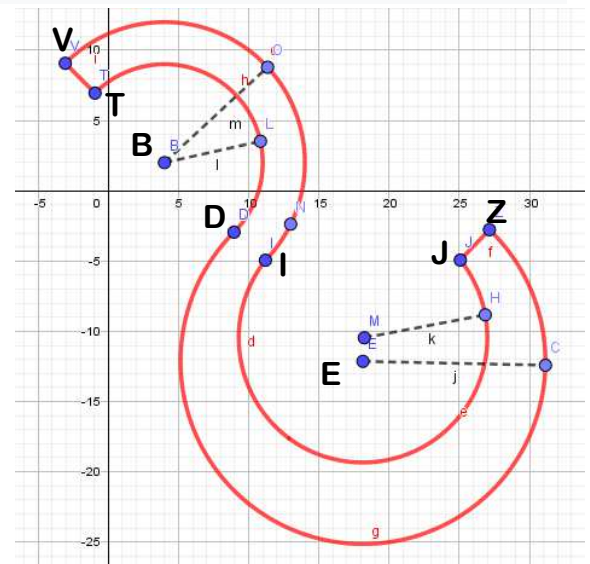
Z($\sqrt{823}$,25;12°36'43,78";96°0'6,03";78°56'55,11")

Se desea determinar:

- Las **coordenadas Cartesianas** de los puntos a la hora del replanteo general.
- Si la **altura del conjunto es constante**.
- La **longitud en planta** de los arcos exteriores (arco VI y arco DZ) de la construcción, para lo cual se dan los siguientes puntos:

B(4; 2;0) centro del arco VI que abarca un ángulo de 180°.

E(18,5; -12,28125; 0) centro del arco DZ que abarca un ángulo de 268°39'55,38".



13) Calcular las **coordenadas esféricas** de los puntos A, B, C, D, para su replanteo con la Estación Total de un edificio de planta curvas.

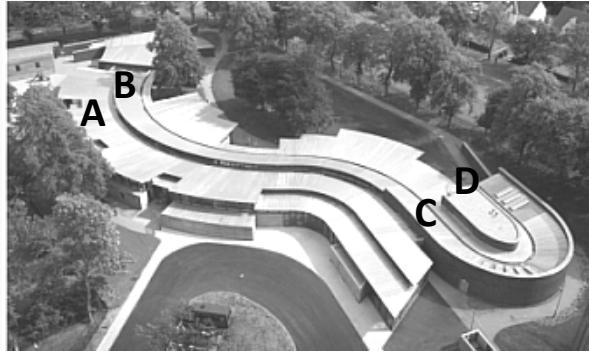
Datos:

A(6; 5.5; 3,5)

B(6; 10; 5)

C(21; 10.5; 5)

D(21; 10.5; 6.5)



14)a- Calcular la **pendiente** (en porcentaje) que tienen los faldones 1 y 2 del techo de una construcción similar a la vivienda en Oud-Heverlee, Bélgica, si suponemos que su planta es rectangular y que el segmento AB es paralelo al eje x.

b -Calcular **el área**, en m^2 , de la planta rectangular.



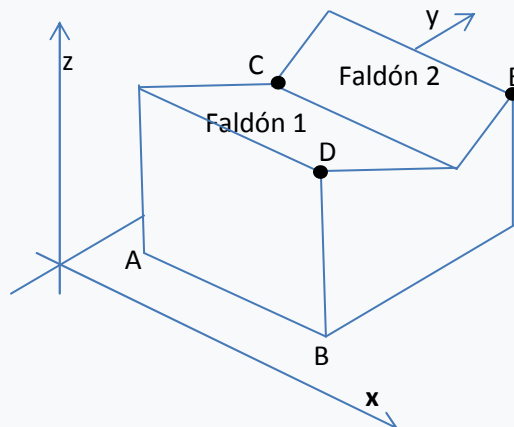
<https://freshome.com/2013/06/03/adapted-to-the-needs-of-an-elderly-couple-family-house-in-oud-heverlee/>

Datos:

C($\sqrt{128,25}$; $69^{\circ}18'58,7''$; $27^{\circ}59'27,49''$; $71^{\circ}59'51,2''$)

D($\sqrt{272}$; $14^{\circ}2'10,48''$; 4,5)

E($\sqrt{477}$; $41^{\circ}11'9,33''$; $13^{\circ}14'3,61''$)



15)a- ¿Cuál es **la altura**, en metros, de piso a techo que tiene el proyecto de la Villa Olímpica, en el hall de planta baja y entre las plantas tipo, si suponemos que con la estación global se leen las siguientes coordenadas?

b-¿Cuántos metros mide **la antena**? .

Datos:

Hall acceso

A($\sqrt{67,25}$; $42^{\circ}30'37,61''$; $7^{\circ}15,13''$)

B($\sqrt{115,25}$; $42^{\circ}30'37,61''$; $40^{\circ}41'45,47''$)

Planta tipo

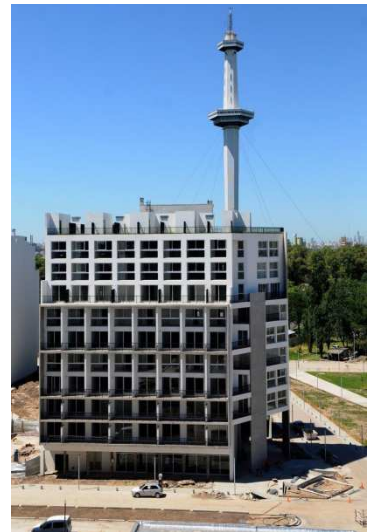
D($\sqrt{204,5}$; $34^{\circ}30'30,68''$; $47^{\circ}14'37,29''$)

E($\sqrt{276,5}$; $34^{\circ}30'30,68''$; $54^{\circ}16'44,35''$)

Antena

F($\sqrt{3334}$; $84^{\circ}2'7,71''$; $83^{\circ}2'12,56''$; $9^{\circ}11'16,13''$)

G($\sqrt{985}$; $78^{\circ}58'42,9''$; $77^{\circ}6'44,77''$; $17^{\circ}4'59,32''$)



https://www.clarin.com/arq/experimento-urbanismo-partes-hecho-realidad_0_H17k6MTVz.html

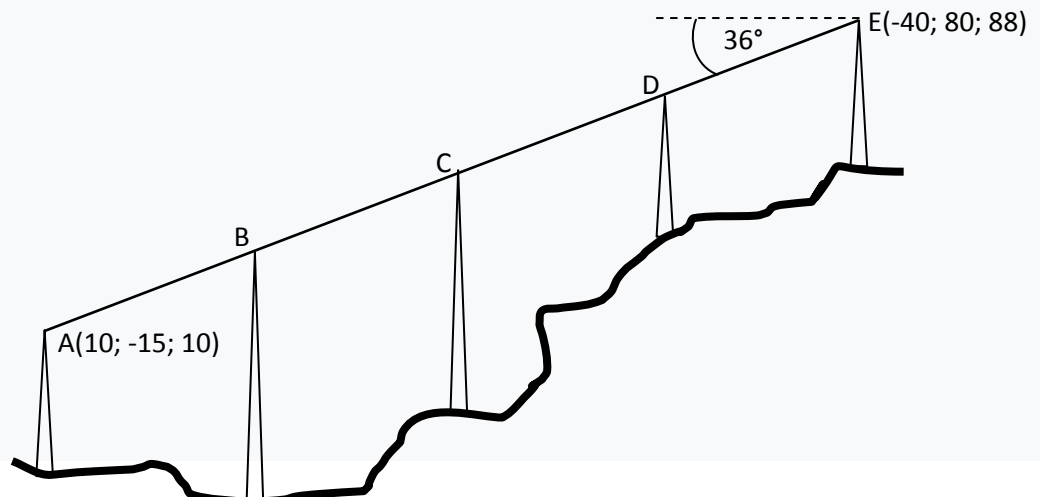
16) Al diseñar una aerosilla se necesita determinar la posición de tres de las torres intermedias (B; C; D). Topográficamente se salva el desnivel con un ángulo de depresión de 36° .

a- Graficar el conjunto en un sistema espacial para su mejor interpretación.

a- Calcular **la distancia** entre el punto de partida y el punto de llegada de la aerosilla, sin considerar la catenaria que forma el cable en su desarrollo.

b- Calcular **las coordenadas cartesianas** de los puntos superiores de sus torres intermedias.

Nota: Las torres de partida y de llegada tiene ambas la misma altura.



SOLUCIONES

SISTEMAS DE COORDENADAS TRIDIMENSIONALES

1	a	A ---I Octante B---VII Octante	C ---VI Octante D ---VIII Octante	E ---III Octante F ---IV Octante	G ---II Octante H ---V Octante		
2	a	AB = 11,8743m	BD = 10,0499m	AD = 9,3808m			
	c	Perímetro = 31,3050m					
	d	Área de la losa = 45,5851 m ²					
3		P _M (AB) = R(1/2; 0; -1) Esta en el plano xz	P _M (BD) = S(2,5;-3; -4) VIII Octante	P _M (AD) = T(5; 2; -2) V Octante			
4	a	P _M (OG) = U(-1; 4; 2,5)					
	b	α = 101°58'10,067"	β = 33°56' 46,6621"	γ = 58°46'11,7488"			
5	a	α = 61°20'30,55"	β = 53°7'48,37"	γ = 50°11'5,57"			
	b	P(4,3162; 5,40; 5,7628)					
6	a	E(5; 216°52'11,63"; -5)					
	b	OI = 9,6437 m					
	c	P _M (EI) = V(1/2; -1/2; 3/2) IV Octante					
7	a	Sí, es punto medio					
	b	JN = 10,2347m	LN = 13,8564m	MN = 12,1243m			
8		A(√229,1530; 79°28'47,18"; 54°26'11,73"; 37°33'35,32") B(√304,44; 6143'33,81"; 43°27'7,4") C(√162,82; 43°37'42,79"; 12)					
9	a	Altura del Edificio = 12m					
	b	Longitud del Edificio = 35,4930m					
	c	Q(√2322,77; 31°19'48,36"; 62°50'23,85"; 75°34'56,56")					
10		El ángulo γ es:38°11'43,87" P(4; 6; 9,1652)					
11		Centro (3; -5; 8)	(√98; 72°21'33,73"; 120°20'11,1"; 36°5'13,73")	Polo Sur (3; -5; 4)	(√50; 64°53'45,28"; 135°; 55°33'0,35")		
			(√98; 300°57'49,52"; 53°54'46,27")		(√50; 300°57'49,52"; 34°26'59,65")		
			(√34; 300°57'49,52"; 8)		(√34; 300°57'49,52"; 4)		
12	a	V (-3;9;3,5)	T (-1;7;3,5)	D (9;-3;4,5)	I (11;-5;4,5)	J (25;-5;5,5)	Z (28;-3;5,5)
	b	No es constante. Crece su altura paulatinamente de 1 en 1 metro , total 2 m.					
	c	Arco VI =31,1002m			Arco DZ = 62,2770m		



13		A (√78,5; 42°30'37,61"; 23°16'4,89")	C (√576,25; 26°33'54,18"; 12°1'19,39")	
		B (√161; 59°2'10,49"; 23°12'25,43")	D (√593,5; 26°33'54,18"; 15°28'28,43")	
14		Faldón 1 ---pendiente 16,67%		
		Faldón 2 ---pendiente 37,5%		
		Superficie en planta 120 m ²		
15		Altura del Hall de Ingreso = 6 m		
		Altura de plantas tipo = 3m		
		Altura de antena = 27 m		
16	a	Distancia AE = 132,6989 m		
	b	B(-2,5; 8,75; 29,5)	C(-15; 32,5; 49)	D(-27,5; 56,25; 68,5)

SECCIONES CÓNICAS

Y SUPERFICIES - DEL PLANO (2D) AL ESPACIO (3D)

Por

CLARISA
LANZILLOTTO

Introducción:

Las secciones cónicas como tales están presentes en múltiples obras de la Arquitectura de todos los tiempos. Éstas son líneas curvas, algunas abiertas y otras cerradas, llamadas CIRCUNFERENCIA, ELIPSE, PARÁBOLA E HIPÉRBOLA.



FANG YUANG

<https://madelcisne2.files.wordpress.com/2014/10/fan-yuang.jpg>

PUENTE DE VENTAS

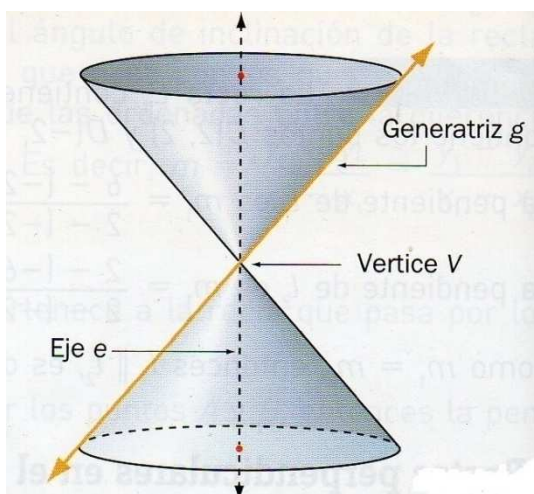
https://madelcisne2.files.wordpress.com/2014/10/7646641352_f93f73aae9_z.jpg

ANFITEATRO DE CAPUA

<https://madelcisne2.files.wordpress.com/2014/10/anfi2-300x199.jpg>



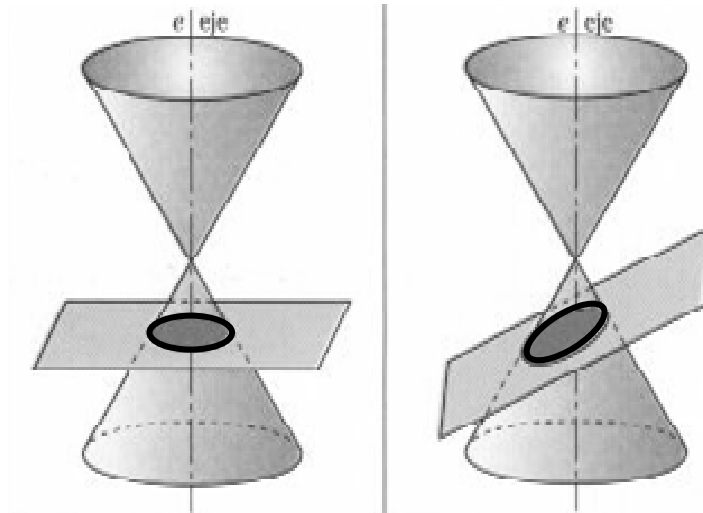
Para definir las cónicas desde el punto de vista geométrico, debemos previamente referirnos a la superficie a partir de la cual se originan estas secciones: **la superficie cónica**.



La misma forma parte de la familia de las superficies regladas (engendradas por rectas) generada por el movimiento de una generatriz (g), manteniéndose en contacto con una directriz (d) curva, teniendo, todas las posiciones de la generatriz (g), un punto común (V), denominado vértice. La **superficie cónica** es una superficie reglada, radiada, de generatrices concurrentes.

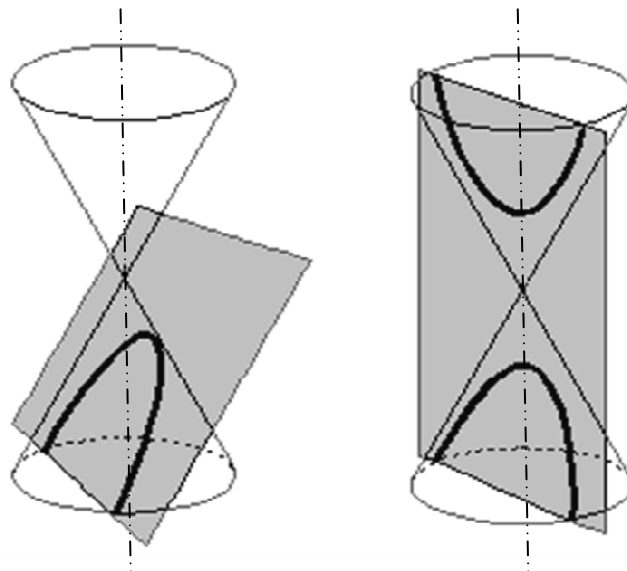
<http://javoses1015.blogspot.com/2015/10/superficie-conica.html>

De la intersección de una superficie cónica circular y un plano secante que no pasa por el vértice, según la inclinación del plano resultan distintas curvas; algunas **cerradas como la circunferencia y la elipse**, y otras **abiertas como la parábola y la hipérbola**. Estas curvas reciben el nombre de **cónicas o secciones cónicas**.



Circunferencia: Línea curva cerrada que se obtiene por un plano secante que intersecta a la superficie y es perpendicular al eje de la superficie cónica.

Elipse: Línea curva cerrada que se obtiene por un plano secante que intersecta a la superficie y es oblicuo respecto del eje de la superficie cónica.



Parábola: Línea curva abierta que se obtiene por un plano secante que intersecta a la superficie cónica y es paralelo a una generatriz.

Hipérbola: Línea curva abierta que se obtiene por un plano que intersecta a la superficie cónica y es paralelo a dos generatrices.

Para estudiarlas, definiremos las secciones cónicas de la mano de la Geometría Analítica como **el lugar geométrico de los puntos del plano cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante**. El punto fijo se llama *Foco de la cónica*, la recta fija es la *directriz de la cónica*. La relación constante se llama *excentricidad* y se representa generalmente con la letra e .

Las secciones cónicas se clasifican en categorías según su forma y propiedades. Estas se establecen de acuerdo con los valores de la excentricidad e .

Si $e = 0$ la cónica se llama circunferencia

Si $e < 1$ la cónica se llama elipse

Si $e = 1$ la cónica se llama parábola

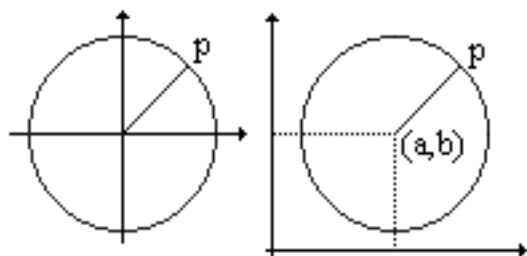
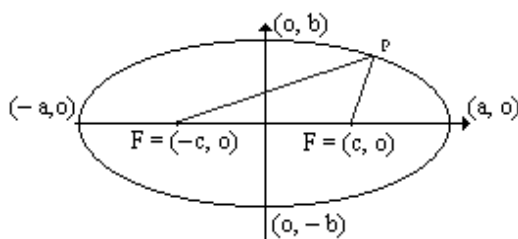
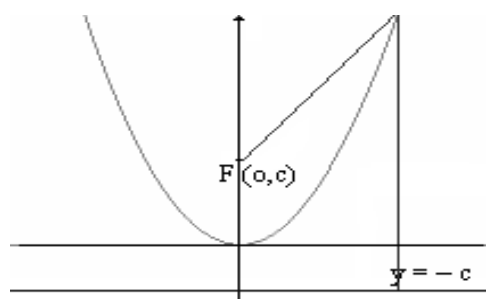
Si $e > 1$ la cónica se llama hipérbola

Las cónicas responden a una ecuación general de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En donde los coeficientes A , B , C , D , E , y F , son números reales que determinan el tipo de Curva.

En este curso desarrollaremos cada una de las secciones cónicas, iniciando el estudio por las cónicas cerradas: Circunferencia y Elipse y posteriormente las cónicas abiertas: Parábola e Hipérbola.

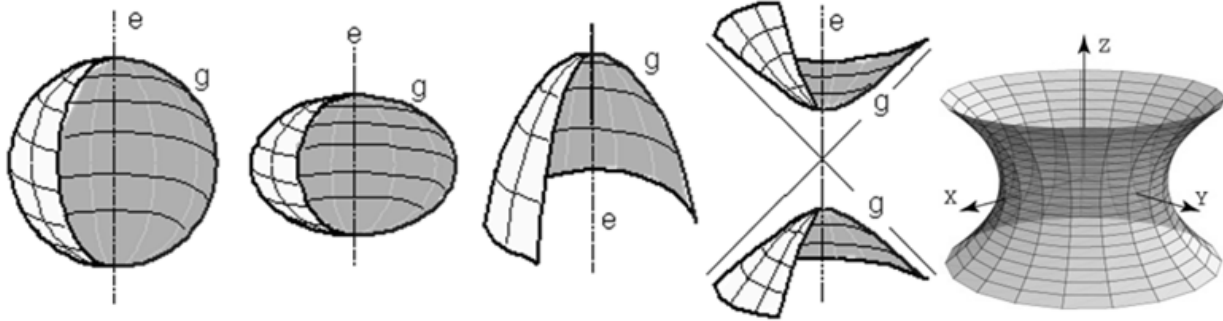


Las posicionaremos en el Plano cartesiano y estudiaremos sus elementos y sus ecuaciones

Recordamos que **LAS ECUACIONES** de las cónicas posibilitan obtener la posición de todos y cada uno de los puntos que conforman el lugar geométrico de la sección cónica en estudio.

Las secciones cónicas generan superficies curvas. Esas superficies se posicionan en el espacio. Dentro de la familia de las superficies curvas, el grupo de las Cuádricas son las superficies que tienen **por generatriz a una sección cónica y por eje de rotación a la recta que contiene a un eje de esa cónica.** Son la **superficie Esférica, los elipsoides, los paraboloides, y los hiperboloides.**

La imagen que sigue muestra cómo las cónicas **son generatrices** de estas superficies.



En la imagen:

1-Superficie Esférica- Generatriz: Circunferencia

2-Elipsoide- Generatriz: Elipse

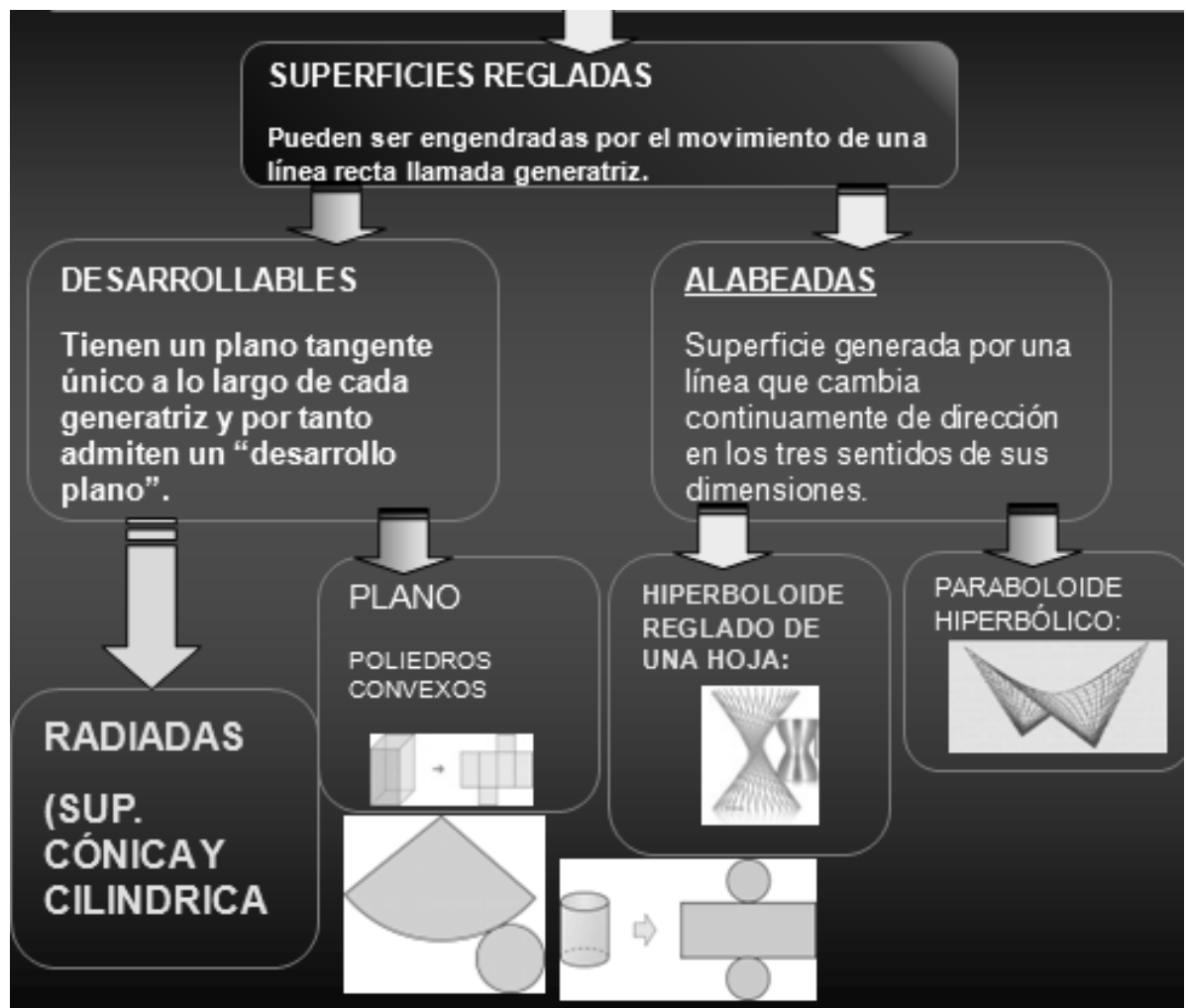
3- Paraboloide- Generatriz: Parábola

4- Hiperboloide de dos hojas- Generatriz: Hipérbola

5- Hiperboloide de una hoja- Generatriz: Hipérbola

En esta Introducción solamente diremos que estudiaremos estas superficies desde la Geometría Analítica Espacial, comprendiendo sus ecuaciones y sus gráficas y posicionándolas en el Espacio Cartesiano.

Seguidamente, el cuadro inferior presenta una **Clasificación de las distintas superficies**:



De la familia de las superficies regladas, ya conocemos la superficie cónica de la que surgen las secciones cónicas. En un capítulo especial, estudiaremos la superficie **PLANO**, tan utilizada en la Arquitectura, el urbanismo y el Diseño en general.

PARA AMPLIAR CONOCIMIENTOS sobre LAS OTRAS SUPERFICIES REGLADAS RECURRE AL APUNTE DE SUPERFICIES EN EL AULA VIRTUAL DE LA CÁTEDRA



Como ya anticipamos, estudiaremos particularmente **la Superficie Esférica, los Elipsoides, los Hiperboloides y los Paraboloides** posicionados en el espacio cartesiano. Conoceremos sus elementos, sus características y trabajaremos con sus ecuaciones. Es de destacar que los hiperboloides de una hoja y los paraboloides también pueden considerarse dentro de la familia de las superficies regladas, ya que también pueden generarse mediante rectas.

En este sentido es importante presentar una síntesis conceptual referida a **Superficies Cuádricas**.

Definición: Una cuádrica es el lugar geométrico de los puntos del espacio (x,y,z) que verifican una ecuación de segundo grado del tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

En donde uno por los menos de los seis coeficientes A, B, C, D, E, y F es diferente de 0.

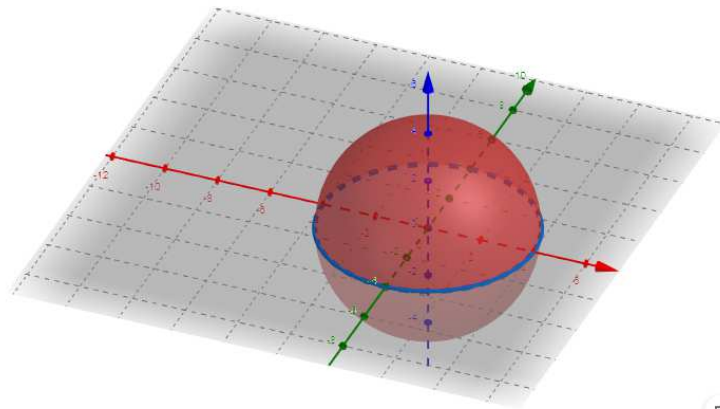
Para su estudio consideraremos a las:

- **Cuádricas con centro** que representan a las superficies que tienen un centro de simetría. Estas superficies responden a la ecuación:

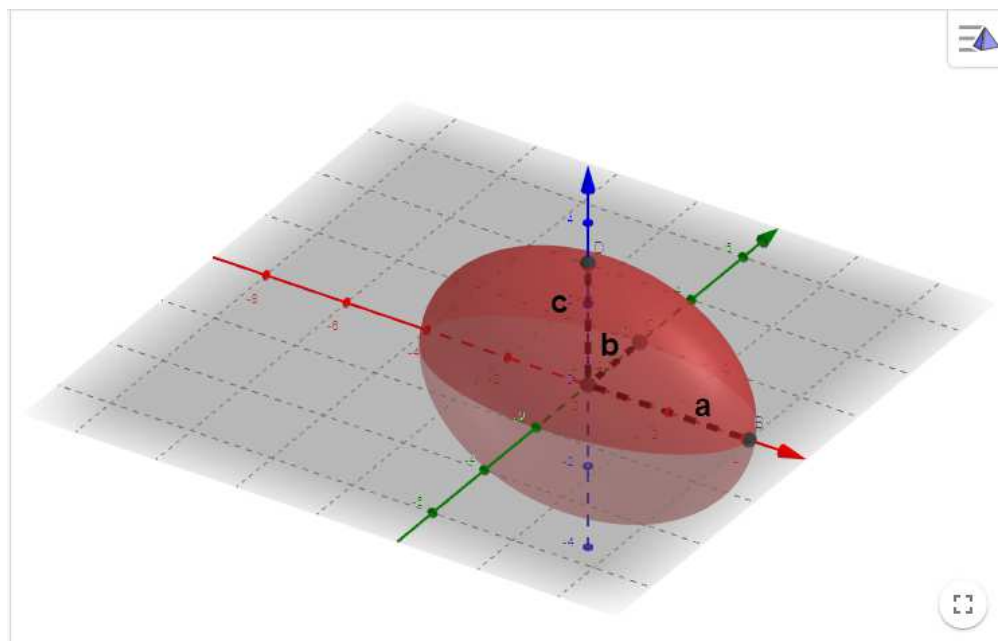
$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

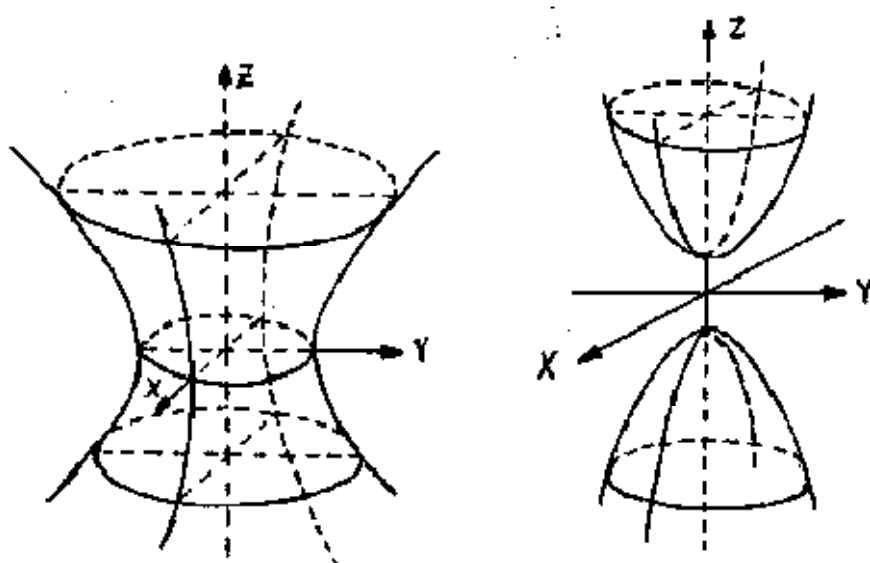
Donde **a, b y c** son los semiejes de la superficie.

A este grupo pertenecen: LA SUPERFICIE ESFÉRICA, LOS ELIPSOIDES Y LOS HIPERBOLOIDES DE UNA HOJA Y DE DOS HOJAS.



Superficie esférica y Elipsoide



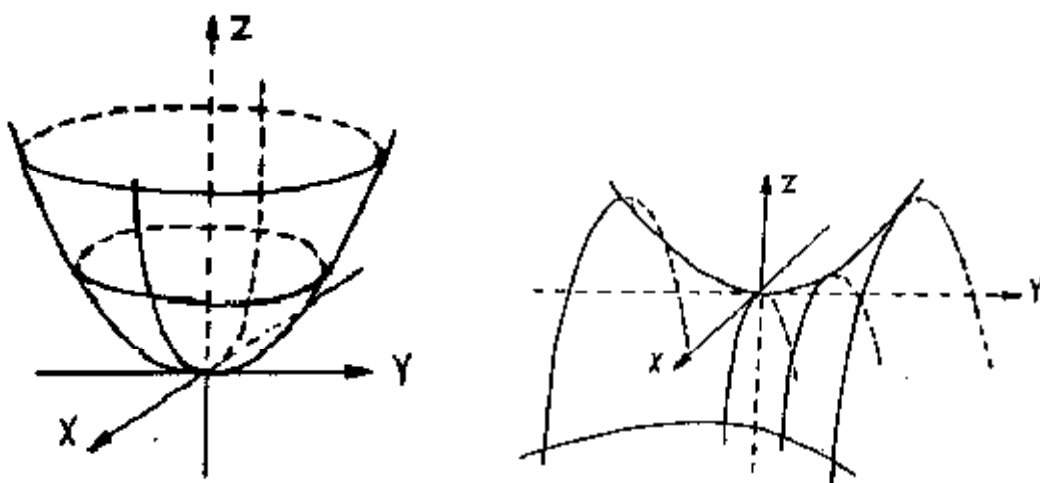


Hiperboloide de una hoja- Hiperboloide de dos hojas

- **Cuádricas sin centro:** Estas superficies no tienen centro de simetría. Vamos a considerar las representadas por la ecuación:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Son Cuádricas sin centro: EL PARABOLOIDE ELÍPTICO Y EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.(se muestran en las imágenes en ese orden)



PARA AMPLIAR CONOCIMIENTOS sobre LAS OTRAS SUPERFICIES NO REGLADAS O CURVAS RECURRE AL APUNTE DE SUPERFICIES EN EL AULA VIRTUAL DE LA CÁTEDRA. ALLÍ ENCONTRARÁS INFORMACIÓN SOBRE TOROS, ESCOCIAS Y OTRAS.

CIRCUNFERENCIA - SUPERFICIE ESFÉRICA DEL PLANO (2D) AL ESPACIO (3D)

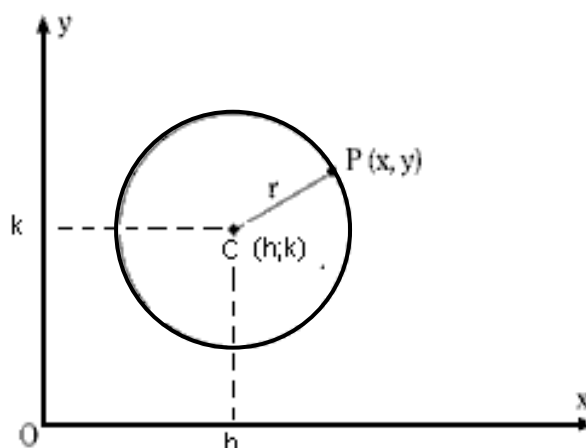
Por
**CLARISA
LANZILLOTTO**

CIRCUNFERENCIA:

La circunferencia es una sección cónica cerrada. Su **excentricidad $e=0$** . La definiremos y estudiaremos desde el punto de vista de la Geometría Analítica. Según la misma, **la circunferencia** es el lugar geométrico del conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo dado en ese plano. El punto fijo se llama **Centro** y la distancia al mismo se llama **radio**.

Los Elementos de la Circunferencia son: **Centro C y radio r**

A partir de una circunferencia de Centro C y radio r orientada en un Sistema Coordenado Cartesiano Ortogonal podremos deducir la ecuación matemática que le corresponde.



Considerando la posición del Centro con sus coordenadas **C(h;k)** y el valor del **radio**, se derivan las formas de la ecuación de la circunferencia. Por ejemplo si los datos son: C (4;5) y radio $r=6$, podrá componerse la ECUACIÓN ORDINARIA de la circunferencia que se corresponde con la siguiente expresión:

ECUACIÓN ORDINARIA:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

De acuerdo a los datos:

C (4;5) y radio $r=6$, la ecuación ordinaria será:

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 36$$

De la misma forma, dada la ecuación ordinaria podremos encontrar la posición del Centro y el valor del radio de una circunferencia.

Desarrollando la ecuación ordinaria, se obtiene otra forma de ecuación de la circunferencia que es la **ECUACIÓN GENERAL** y que responde a la siguiente expresión:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En donde podremos encontrar nuevos términos cuyos coeficientes permiten despejar las coordenadas del Centro de la circunferencia de la siguiente manera:

$$D = -2h \quad \therefore h = -D/2 \quad E = -2k \quad \therefore k = -E/2$$

Y conocer el valor del radio a partir del término F:

$$F = h^2 + k^2 - r^2 \quad \therefore \quad r^2 = h^2 + k^2 - F$$

si extraemos la raíz cuadrada en ambos miembros, podremos despejar el radio:

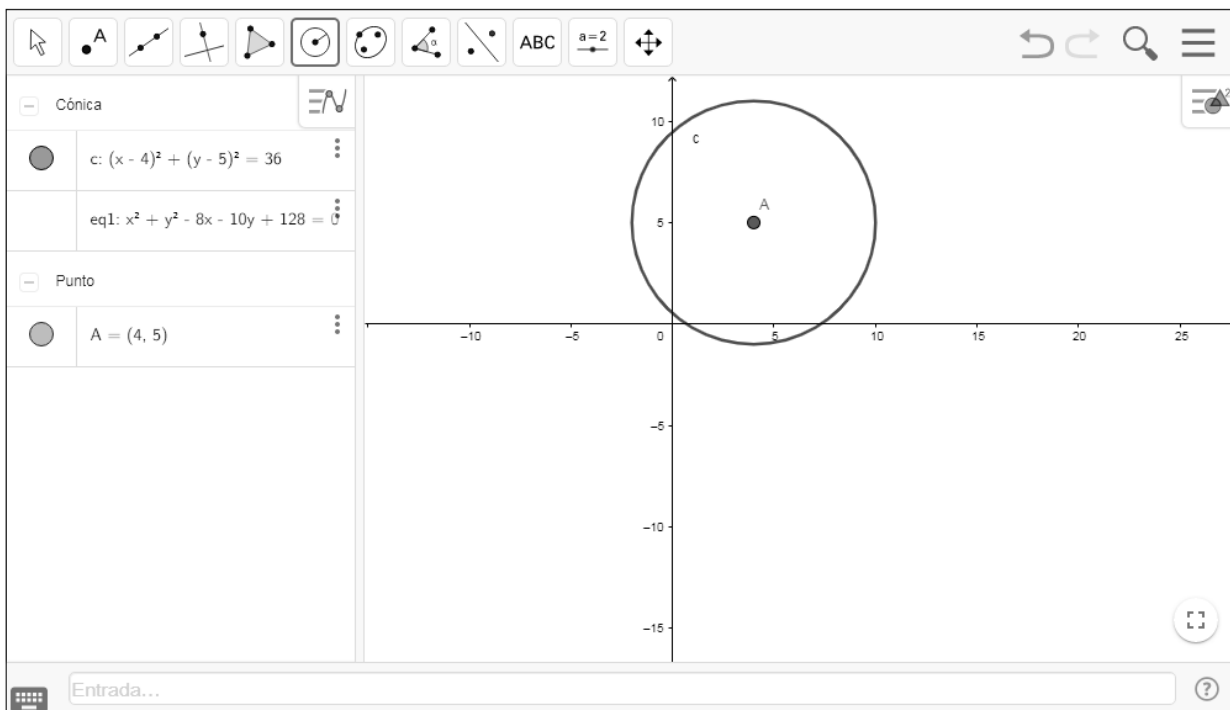
$$\sqrt{r^2} = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$$

Para el caso del ejemplo anterior, encontraremos el valor de D, E y F para armar la Ecuación General.

$$D = -2 \times 4 = -8 \quad E = -2 \times 5 = -10 \quad F = (-8)^2 + (-10)^2 - (6)^2 = 128$$

Luego, la ecuación General para la circunferencia del ejemplo será:

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 128 = 0$$



En Geometría Analítica, los cálculos deben estar acompañados del correspondiente gráfico.

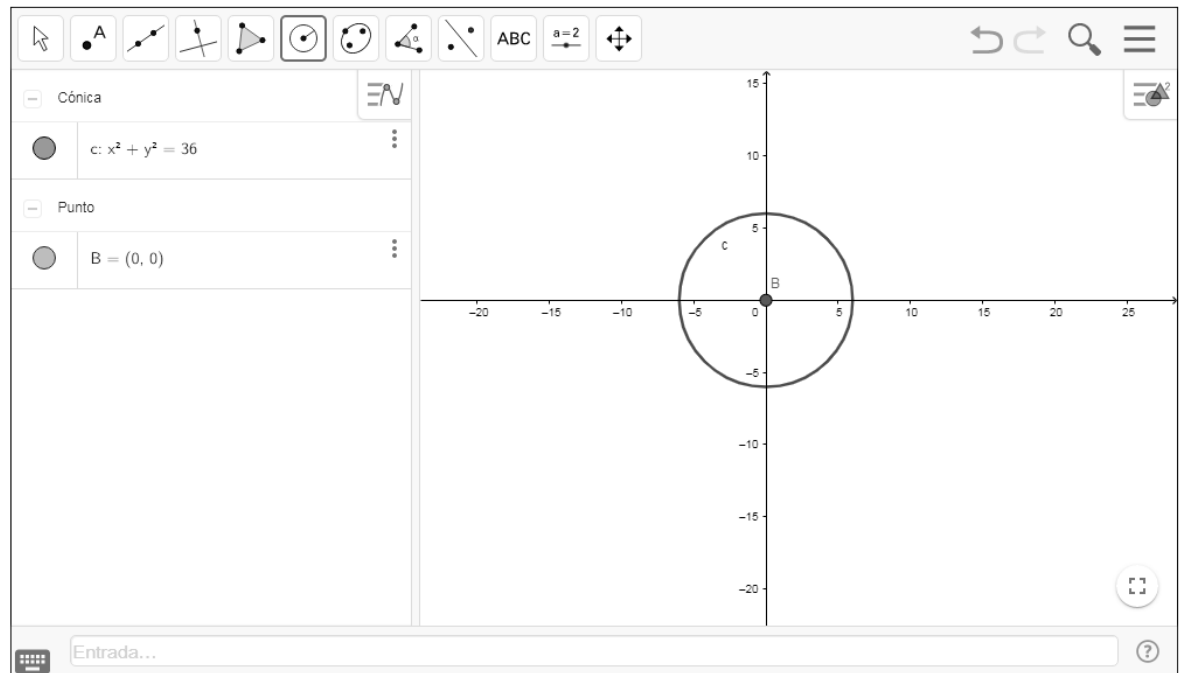
Gráfico realizado con Geogebra

Si $D = E = 0$, el **centro de la circunferencia coincide con el origen** del Sistema Coordinado y la ecuación es la **ECUACIÓN CANÓNICA**:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

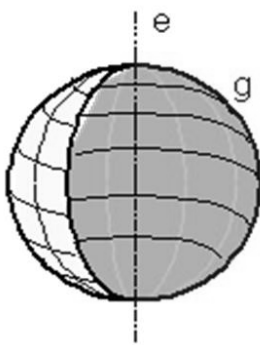
Para el caso del ejemplo para $C(0;0)$ y $r=6$, la ecuación será:

$$x^2 + y^2 = 36$$



SUPERFICIE ESFÉRICA:

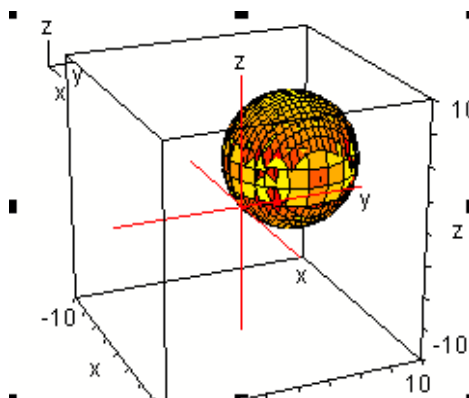
Es una cuádrica de revolución. Tiene por generatriz a una circunferencia y por eje de rotación a la recta que contiene a un eje de esa circunferencia.



Posicionada en el espacio geométrico, la superficie esférica de **centro C(a, b, c) y radio r** es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyas coordenadas cartesianas satisfacen la ecuación de la forma:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Siendo **a, b y c** las coordenadas del centro de la Superficie esférica.



Recordamos que cuando nos referimos a **SUPERFICIE ESFÉRICA** aludimos a la cáscara, ya que cuando nos referimos a **ESFERA**, estamos hablando del sólido geométrico.

Si la superficie esférica de la imagen tiene Centro **C(-3;4;5)** y radio **r=5** su ecuación será:

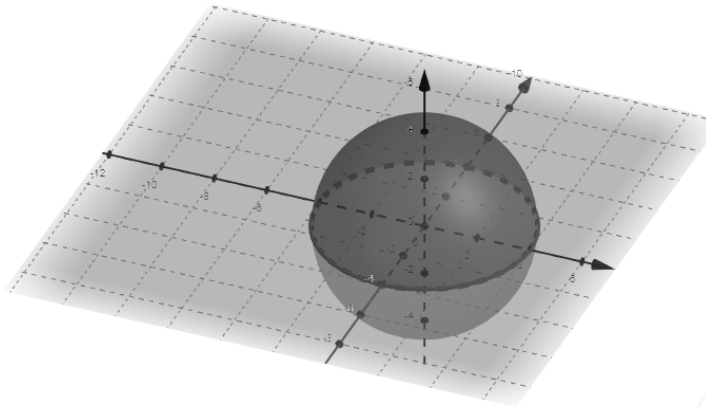
$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 25$$

Si las coordenadas del centro son $C(0;0;0)$, la superficie esférica tiene su centro en el origen del Sistema Coordenado, por tanto la ecuación será:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

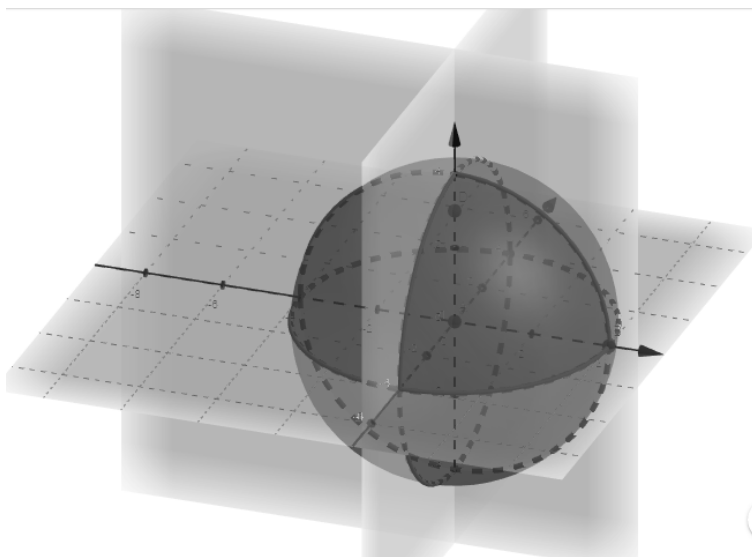
Para el ejemplo, si el radio es $r=5$, la ecuación será:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$



TRAZAS DE LA SUPERFICIE ESFÉRICA:

Las trazas de una superficie en el espacio son las figuras que resultan cuando la superficie es intersectada por los planos coordenados XY , YZ y XZ . Si la superficie es intersectada por planos paralelos a los planos coordenados, a las figuras resultantes las llamaremos Intersecciones.

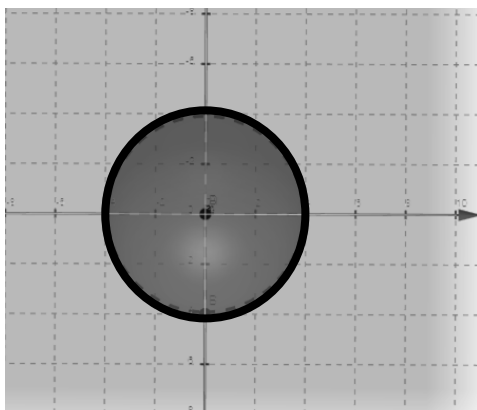


Si observamos en la imagen las trazas de una superficie esférica son siempre **circunferencias**.

Cuando una superficie tiene trazas que son circunferencias, se dice que es **una cuádrica de revolución**.

De esas circunferencias que son trazas, podremos construir sus ecuaciones, calcular sus perímetros, sus áreas y representarlas en el plano. En la imagen siguiente se muestran las trazas y sus

ecuaciones tomando el ejemplo anterior.



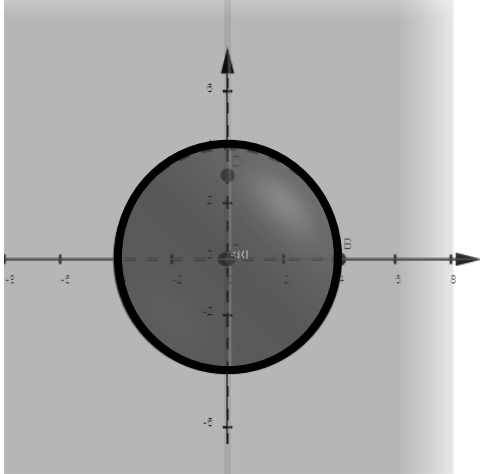
Traza Plano XY : circunferencia

Ecuación de la traza:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Para el ejemplo

$$x^2 + y^2 = 25$$



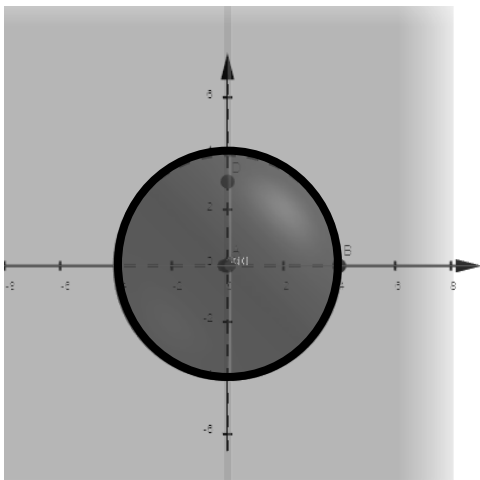
Traza Plano XZ: circunferencia

Ecuación de la traza:

$$x^2 + z^2 = r^2$$

Para el ejemplo

$$x^2 + z^2 = 25$$



Traza Plano YZ: circunferencia

Ecuación de la traza:

$$y^2 + z^2 = r^2$$

Para el ejemplo

$$y^2 + z^2 = 25$$

De este modo trabajaremos con todas las superficies, reconociendo sus **características y elementos**, posicionándolas en el espacio según los mismos, definiendo sus **ecuaciones** y reconociendo **sus trazas y las ecuaciones de sus trazas**.



<https://www.stockholmlive.com/en/our-arenas/ericsson-globe>

<https://www.renovablesverdes.com/tecnoesfera-el-edificio-redondo-mas-impresionante-del-mundo/>

APLICACIONES

CIRCUNFERENCIA Y SUPERFICIE ESFÉRICA

 por ANDREA FARÍAS
y PABLO ALMADA

CIRCUNFERENCIA:

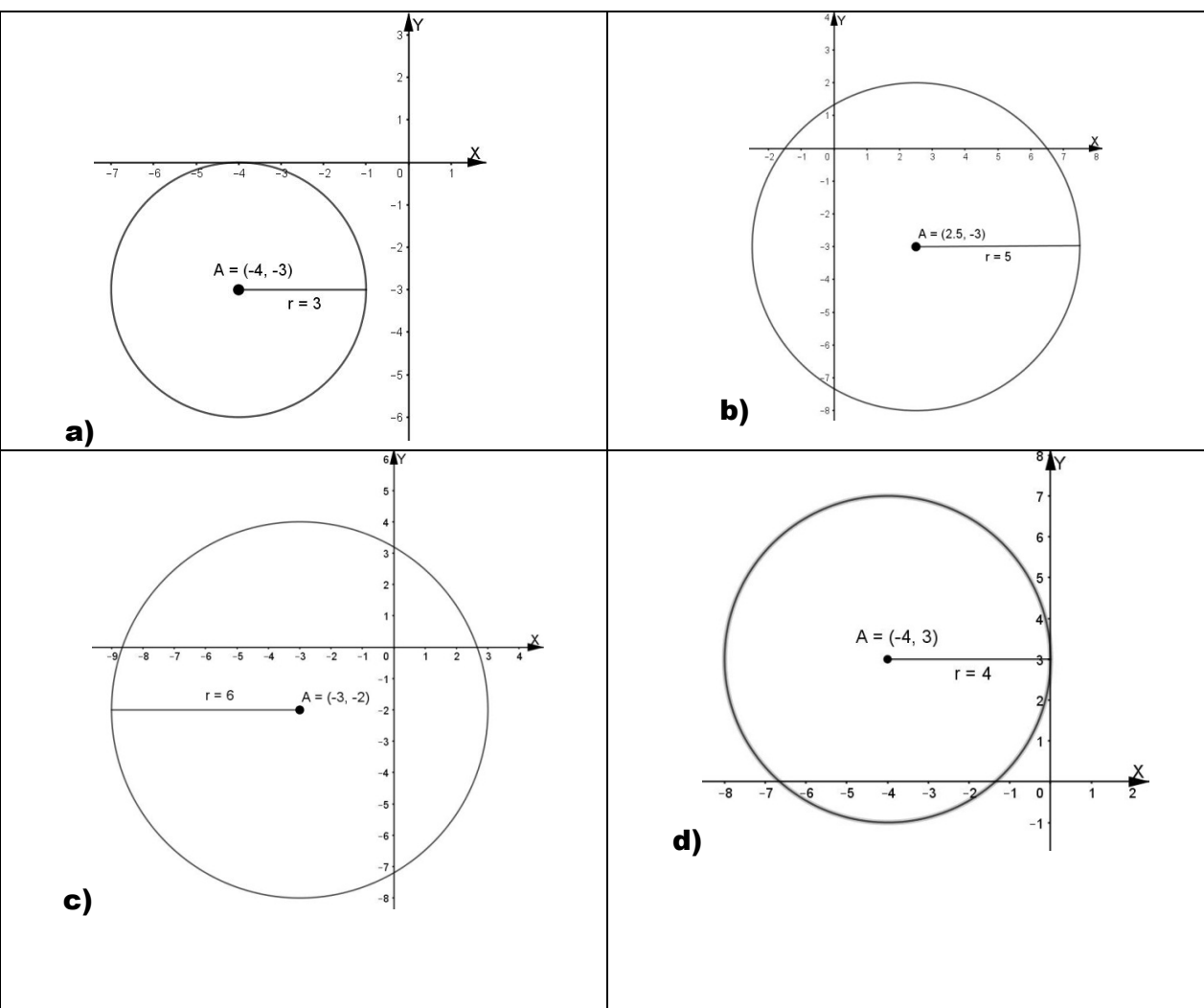
EJERCICIO N°1:

Con los datos que aparecen en la tabla, se pide hallar la **Ecuación Ordinaria de la Circunferencia-Graficar a escala.**

	Centro	Radio	Ecuación Circunferencia
a)	$A=(3;5)$	$r=2,5m$	
b)	$B=(-6;0)$	$r=3,0m$	
c)	$C=(4;-2)$	$r=\text{distancia CD}$ $C=(4;-2)$ $D=(-1;3,5)$	

EJERCICIO N°2:

Para cada uno de los siguientes gráficos, se pide hallar la **Ecuación General de la Circunferencia.**





EJERCICIO N°3:

A continuación se presentan las ecuaciones de cuatro circunferencias y los pares ordenados de cuatro puntos en el plano. Determinar qué punto pertenece a cada circunferencia, demostrándolo analíticamente. Unir con flechas.

$X^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$	(0 ; -4)
$X^2 + y^2 = 21$	(-1 ; $\sqrt{20}$)
$X^2 + y^2 + 4y = 0$	(2,464101615 ; 8)
$(x + 1)^2 + (y - 10)^2 = 16$	(1 ; -3)

EJERCICIO N°4:

Completar la siguiente tabla a partir de los datos dados para cada caso ("h" y "k" son las coordenadas "x" e "y" del centro de las circunferencias).

Ecuación ordinaria	"h"	"k"	"r"	Perímetro	Superficie
	-12	20	18		
	2	-6			452,3893421 m ²
	0	0		40,8407045 m	
$x^2 + (y - 15)^2 = 121$					
$(x - 35)^2 + (y + 2)^2 = 1$					

EJERCICIO N°5:

Este es el edificio GUANGZHOU CIRCLE, ubicado en la ciudad china de Guangzhou y diseñado por Di Pasquale, del estudio de Milán AM Proyect. El edificio de 138 metros de altura contiene un círculo, con un diámetro de 50 metros, que perfora el corazón de la estructura de 33 pisos, convirtiendo el edificio en un círculo hueco. Cuando se refleja en el río, esta forma se convierte en una figura de ocho – un número de la suerte en la cultura china.-



<https://destinoinfinito.com/4-edificios-circulares-inusuales/>

Suponiendo que el centro geométrico “C” de ambas circunferencias se encuentra en $C=(0;0)$ se pide calcular:

- La ECUACION ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA INTERIOR.
- La ECUACION ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA EXTERIOR.

EJERCICIO N°6:

La imagen de la derecha nos muestra la fachada del HOTEL RADISSON BLUE, ubicado en la ciudad de Frankfurt (Alemania) y diseñado por John Seifert Architects Ltd. El edificio se destaca al ingresar a la ciudad, especialmente por su extraordinaria arquitectura, parece un disco circular vertical. Su estructura se compone de un disco de vidrio de 96 m de altura y su construcción se completó en el año 2005.



<https://destinoinfinito.com/4-edificios-circulares-inusuales/>

Se pide calcular:

- **El Perímetro** de la estructura de vidrio circular, en metros.-
- **El Área** de la misma estructura, en m^2 .-

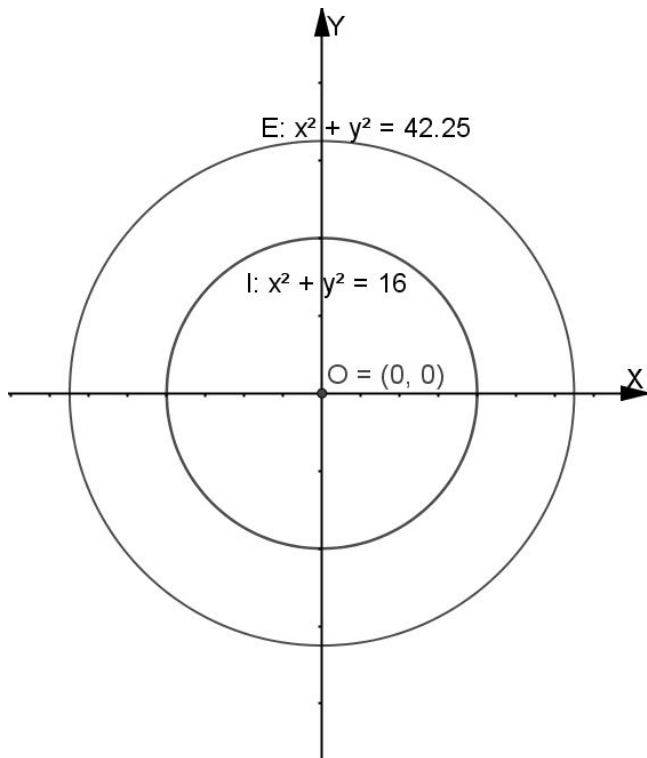
EJERCICIO N°7:

La imagen de la derecha nos muestra a las TULOOU-HAUS, casas tradicionales chinas, declaradas patrimonio de la humanidad por la UNESCO en 2008. Sus cubiertas se esquematizan por dos circunferencias concéntricas, que delimitan patios interiores que con su forma circular colaboran con el acondicionamiento climático de la vivienda.



<https://www.detailerssimon.com/arco-de-circunferencia-para-mejorar-el-confort-en-los-edificios/>

Con los datos del gráfico, (ecuaciones de ambas circunferencias) se pide calcular el **AREA ENCERRADA** entre ambas circunferencias (**Corona Circular**), en m^2 .-



Nota: las medidas de los radios están expresadas en metros (m)

EJERCICIO N°8:

La imagen representa a las TRADICIONALES CASAS CELTAS. Con los datos del grafico se pide calcular: el **VOLUMEN ENCERRADO** dentro de los muros de la vivien-
da (Nota: tener en cuenta para este cálculo el espesor de las paredes perime-
trales y descartar los muros interiores).

Las casas Celtas están conformadas por un cilindro y un cono sobre el anterior a modo de cierre superior.



EJERCICIO N°9:

La obra que se presenta es el Pabellón Serpentine Gallery 2012 de los arquitectos Herzog & de Meuron y el artista Ai Weiwei. La memoria del proyecto expresa:



“ El pabellón de este año llevará a los visitantes por debajo del césped de la Serpentina para explorar la historia oculta de sus pabellones anteriores. Once columnas que caracterizan a cada pabellón anterior y una columna que representa la duodécima estructura actual soportarán un techo cuya plataforma flotará 1,4 metros por encima del suelo. El interior del Pabellón será revestido de corcho, un material calificado como sostenible en la construcción y elegido por sus cualidades únicas al ser su textura un

eco de la tierra excavada. Tomando un enfoque arqueológico, los arquitectos han creado un diseño que va a inspirar a los visitantes a mirar debajo de la superficie del parque, así como en el tiempo a través de los fantasmas de las estructuras anteriores”.

Se trata de dos circunferencias de diferente radio y centros desplazados. Las ecuaciones de las circunferencias son:

Circunferencia menor (**C1**): $x^2 + y^2 = 49$

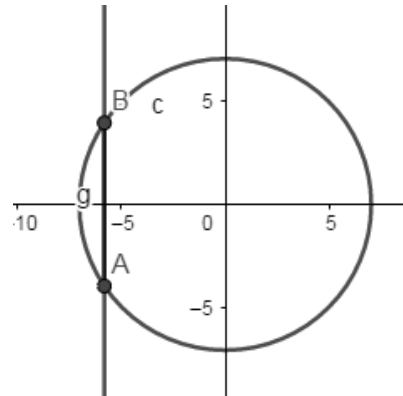
Circunferencia mayor (**C2**): $(x-2,5)^2 + (y+2,5)^2 = 64$

Se pide:

a) **Graficar** ambas circunferencias en un Sistema Coordenado Cartesiano.

b) **Calcular la longitud** del segmento AB de la circunferencia C1 sabiendo que el valor de la abscisa de ambos puntos extremos A y B es $x = -5,8$.

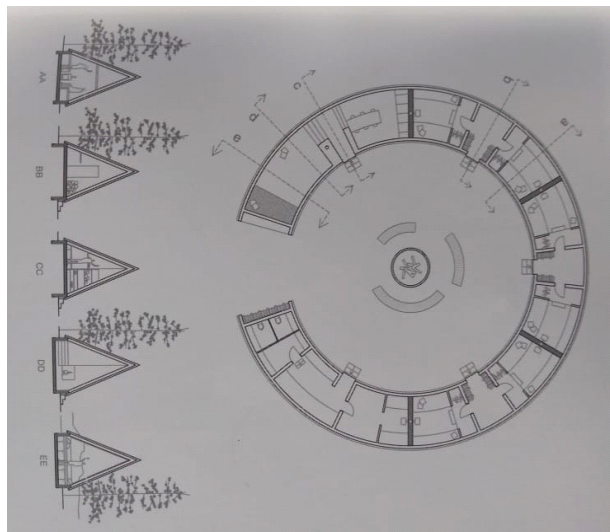
Imágenes extraídas de <https://www.metalocus.es/es/noticias/serpentine-gallery-por-herzog-de-meuron-y-ai-wei-wei>



EJERCICIO N°10:

La obra que se presenta se denomina Refugio de cazadores y fue diseñada por

Varde-Haugen, estudio de arquitectura con sede en Oslo. La memoria del proyecto nos dice: *“Existe la percepción de que la fogata está en el origen de la sociedad moderna: cuando los humanos aprendieron a dominar el fuego, se reunieron a su alrededor y empezaron a desarrollar el lenguaje, las tradiciones y un sentido de comunidad (...) El Retiro de cazadores es un refugio inspirado en esta idea: el bloque se pliega en torno a una chimenea, creando un pequeño atrio circular”*



Revista Plot 46, p.103, Dic-Ene 2019, ISSN 1853-1997, Piedra, Papel & Tijera Editorial.

Se trata de dos circunferencias concéntricas que definen un trapecio circular. De esta manera, la corona circular se perfora para generar el acceso al espacio central. Se sabe que:

- Las ecuaciones de las circunferencias son:

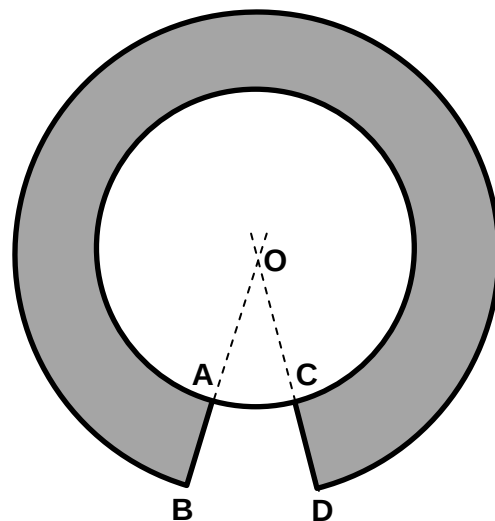
Circunferencia mayor: $x^2 + y^2 - 144 = 0$

Circunferencia menor: $x^2 + y^2 - 64 = 0$

- El ángulo AOC mide 30°

Se pide:

- **Graficar** ambas circunferencias en un Sistema Coordenado Cartesiano.
- **Calcular** el área del trapecio circular ABCD (área sombreada).
- **Calcular** el porcentaje que representa la superficie de dicho trapecio en relación a la corona circular a partir de la cual se genera.



SUPERFICIE ESFÉRICA

EJERCICIO N°1:

Con los datos que aparecen en la tabla, se pide hallar la **Ecuación de la Cuádrica con Centro** correspondiente-**Graficar a escala.**-

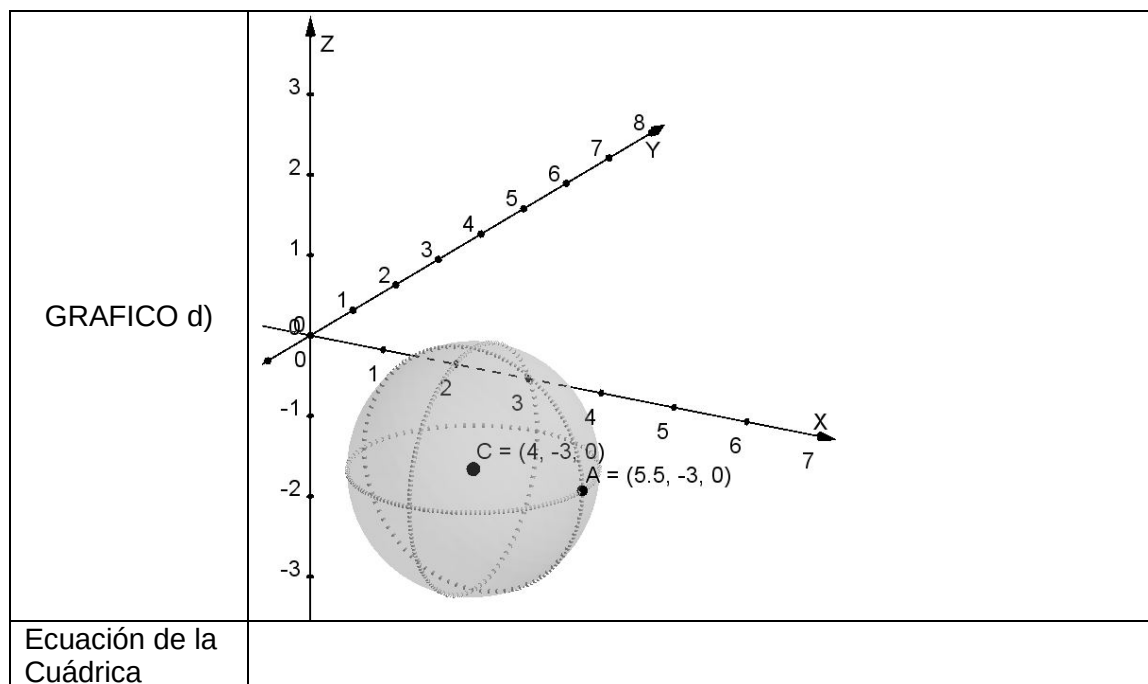
	Centro	Radio	Ecuación de la Cuádrica
a)	(0;0;0)	5	
b)	(0;0;0)	$\sqrt{36}$	
c)	(2;4;1)	2,5	
d)	(-2;3;-6)	4	

EJERCICIO N°2:

Para cada uno de los siguientes gráficos, se pide hallar la **Ecuación de la Cuádrica con Centro** correspondiente.-

GRAFICO a)	
Ecuación de la Cuádrica	

GRAFICO b)	
Ecuación de la Cuádrica	
GRAFICO c)	
Ecuación de la Cuádrica	



EJERCICIO N°3:

Para cada uno de las siguientes Ecuaciones de la Superficie Esférica, se pide **completar la tabla** siguiente y hacer el **Gráfico** correspondiente.-

	Intersección con Ejes	Traza XY	Traza XZ	Traza YZ
$x^2 + y^2 + z^2 = 25$				
$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$				
$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 4$				

EJERCICIO N°4:

El área de una superficie esférica es igual a $5026,548246 \text{ m}^2$. Si se incrementa su radio un 25 %, **¿en qué porcentaje se incrementa su área?** Recordar: Área de la esfera = $4 \pi r^2$

EJERCICIO N°5:

A continuación, se presentan las ecuaciones de cuatro superficies esféricas y las ternas ordenadas de cuatro puntos en el espacio. Determinar qué punto pertenece a cada superficie esférica, demostrándolo analíticamente. Unir con flechas.

$x^2 + y^2 + z^2 = 14$	(-1; 1; 1)
$(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$	(2; 2; 2)
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 21$	(2; -3; 1)
$x^2 + y^2 + z^2 = 3$	(1 ; 1; -1)

EJERCICIO N°6:

FARMER'S COTTAGE DE-LUXE SUMMER HOUSE son casas de jardín diseñadas y comercializadas por el grupo británico de proyectos de Ornate Garden, compuesto por profesionales experimentados, encargados de la ejecución, gestión, proyectos de diseño y fabricación de estos modelos..

Las estructuras de hierro fundido, vidrio y policarbonato tiene forma de superficies esféricas y la Ecuación matemática que las representa es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 170^2$$

Se pide hallar el valor del **Perímetro (en m) de cualquiera de sus trazas**, sabiendo que la medida del radio está dada en cm.-

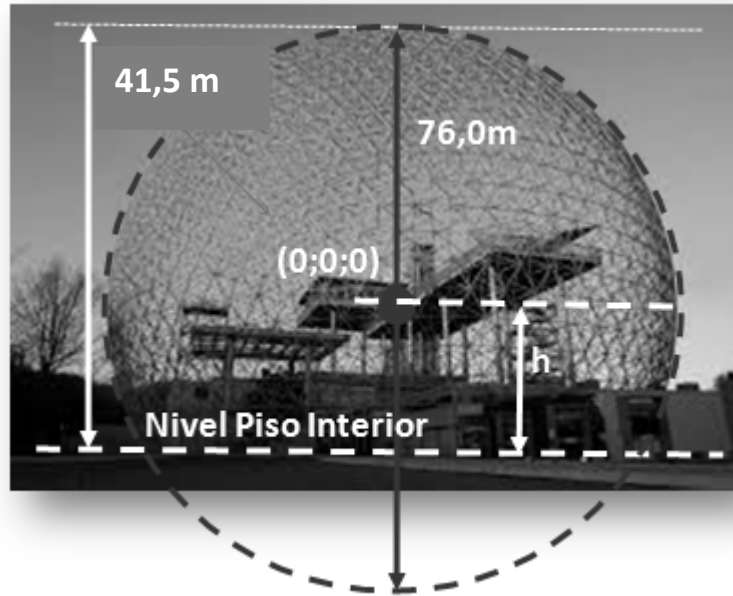


<https://www.ornategarden.com/accessories/3-the-deluxe-summerhouse/>

EJERCICIO N°7:

Este [pabellón esférico futurista](https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/758384/clasicos-de-arquitectura-biosfera-de-montreal-buckminster-fuller) (conocido como la BIOSFERA DE MONTREAL) de 76 m de diámetro y 41,5 m de altura alcanzó fama mundial. Fue realizado para la Exposición Universal Montreal 1967 por el arquitecto Buckminster Fuller. Está realizado con una estructura ligera y una membrana transparente.

<https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/758384/clasicos-de-arquitectura-biosfera-de-montreal-buckminster-fuller>



Con los datos del gráfico, se pide:

- **Clasificación y Ecuación** de la Cuádrica. (Nota: el centro de simetría de la figura coincide con el origen del sistema de coordenadas en el espacio)
- **Área de la traza** ubicada a una distancia "h" del origen del sistema de coordenadas.

EJERCICIO N°8:

El arquitecto Richard Buckminster Fuller se esforzó por mejorar el diseño del “domo geodésico” y completó tres prototipos. El más grande de los tres (apodado el DOMO DEL OJO DE MOSCA por la forma de sus orificios gigantes), se expuso durante el Bicentenario de Los Ángeles de 1981 y tiene 15 metros de diámetro. Se pide:

- **Clasificación y Ecuación** de la cuádrica. (Nota: el centro de simetría de la figura coincide con el origen del sistema de coordenadas en el espacio)
- Calcular el **Perímetro de la intersección** ubicada a nivel del piso exterior. La distancia entre el centro del domo y el plano de piso es de 1,70 m.

<https://www.ornategarden.com/accessories/3-the-deluxe-summerhouse>



EJERCICIO N° 9:

EL MUSEO DE LAS CIENCIAS CIUDAD DE NAGOYA, en Japón, se puede reconocer fácilmente por su enorme superficie esférica plateada, encajada entre dos edificios, y que parece estar flotando en el aire. La superficie esférica de 35 m de diámetro, es la sede del planetario más grande del mundo y se encuentra a 10 m del nivel de piso de la calle.



<http://ruta-33.blogspot.com/2016/04/el-planetario-del-museo-de-ciencia-de-la-ciudad-de-nagoya--japon.html>

Se pide hallar:

- La **Ecuación de la Cuádrica** que representa a dicha superficie.-
- El **área de la intersección paralela al plano XY** a $z=40$ m de altura (desde nivel de calle).-

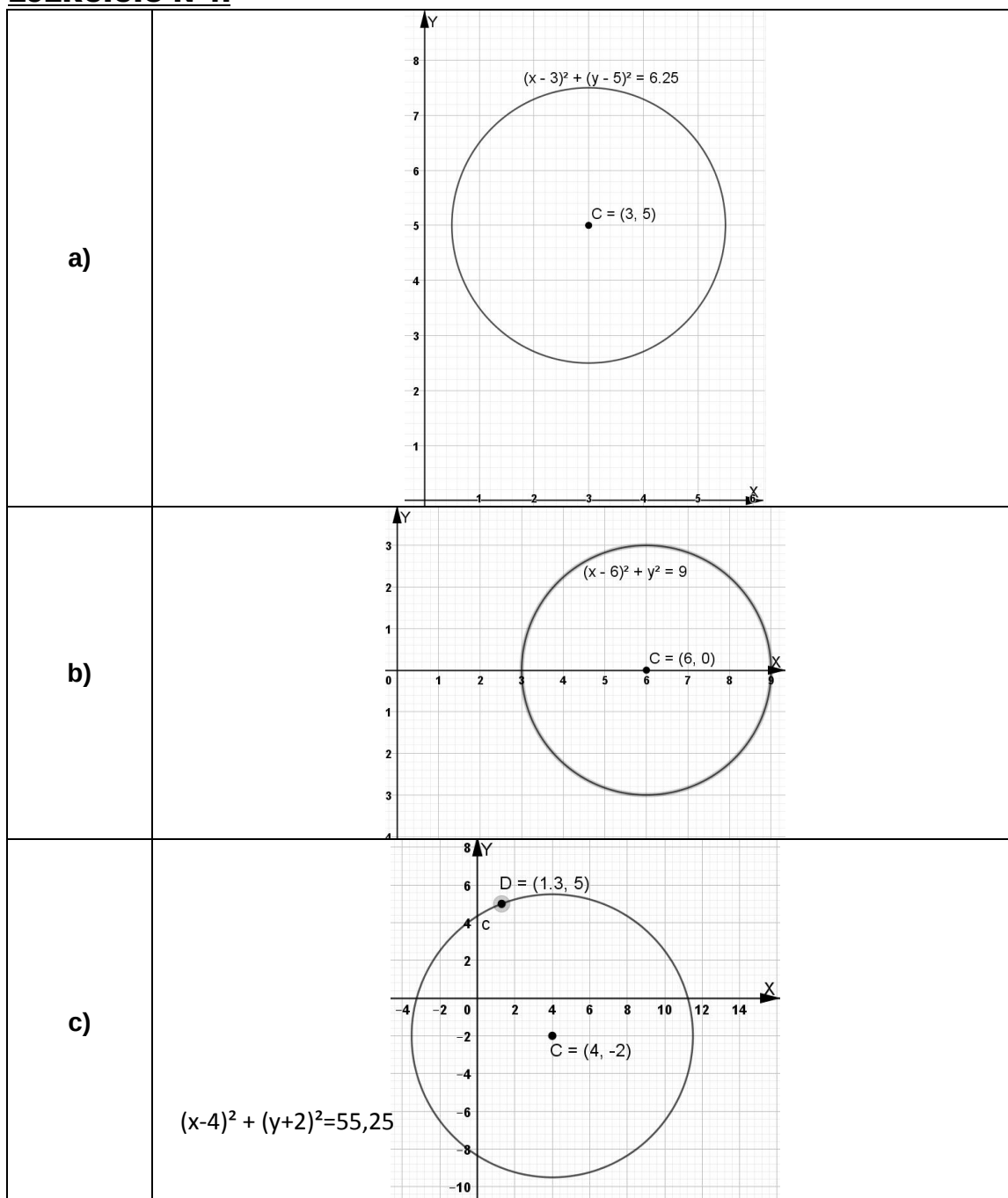
Nota: Considerar que el origen de SCC se encuentra en el centro de simetría de la Superficie Esférica.-

SOLUCIONES

CIRCUNFERENCIA Y SUPERFICIE ESFÉRICA

CIRCUNFERENCIA:

EJERCICIO N°1:



EJERCICIO N°2:

- $(x+4)^2+(y+3)^2=9$
- $(x-2,5)^2+(y+3)^2=25$
- $(x+3)^2+(y+2)^2=36$
- $(x+4)^2+(y-3)^2=16$

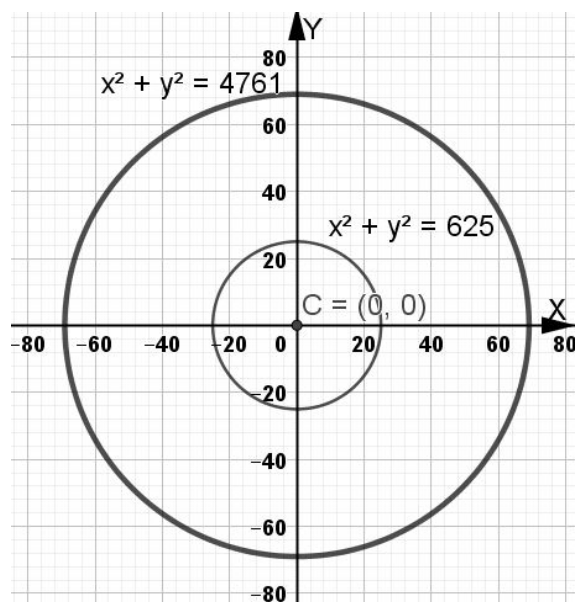
EJERCICIO N°3:

$X^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$	$(0; -4)$
$X^2 + y^2 = 21$	$(-1; \sqrt{20})$
$X^2 + y^2 + 8y = 0$	$(2,464101615; 8)$
$(x + 1)^2 + (y - 10)^2 = 16$	$(1; -3)$

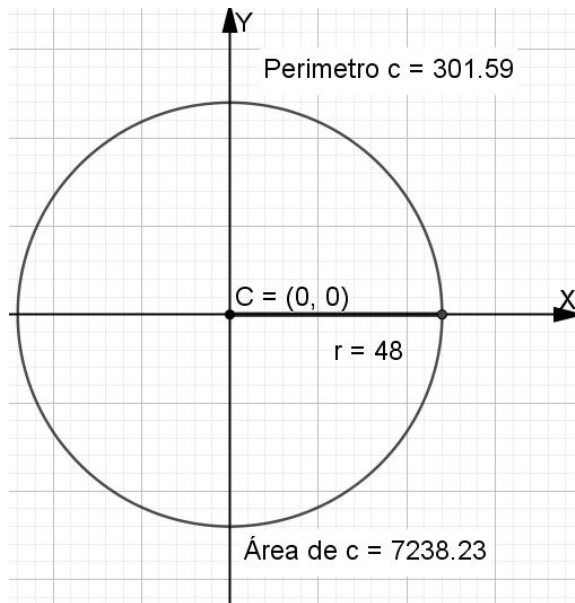
EJERCICIO N°4:

Ecuación ordinaria	"h"	"k"	"r"	Perímetro	Superficie
$(x + 12)^2 + (y - 20)^2 = 18^2$	-12	20	18	113,0973355 m	1017,87602 m ²
$(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 12^2$	2	-6	12	75,39822369 m	452,3893421 m ²
$x^2 + y^2 = 6,5^2$	0	0	6,5	40,8407045 m	132,7322896 m ²
$x^2 + (y - 15)^2 = 121$	0	15	11	69,11503838 m	380,1327111 m ²
$(x - 35)^2 + (y + 2)^2 = 1$	35	-2	1	6,283185307 m	3,141592654 m ²

EJERCICIO N°5:



EJERCICIO N°6:



EJERCICIO N°7:

RESOLUCION:

Circunferencia Exterior:

$$x^2 + y^2 = 42,25 ; r = \sqrt{42,25} ; r = 6,5m$$

$$AREA\ EXTERIOR = \pi \cdot r^2 ; AREA\ EXT. = \pi \cdot 6,5^2 = 132,732\ m^2$$

Circunferencia Interior:

$$x^2 + y^2 = 16 ; r = \sqrt{16} ; r = 4,0m$$

$$AREA\ INTERIOR = \pi \cdot r^2 ; AREA\ EXT. = \pi \cdot 4,0^2 = 50,265\ m^2$$

$$AREA\ ENCERRADA = AREA\ EXTERIOR - AREA\ INTERIOR$$

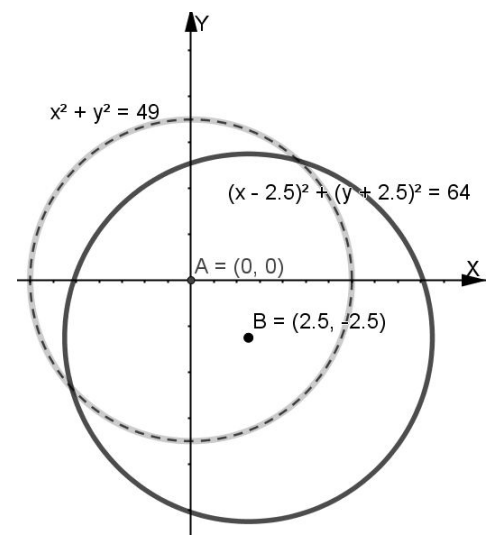
$$\text{Rta. : } AREA\ ENCERRADA = 82,467m^2$$

EJERCICIO N°8:

$$VOLUMEN\ ENCERRADO = 122,41655\ m^3$$

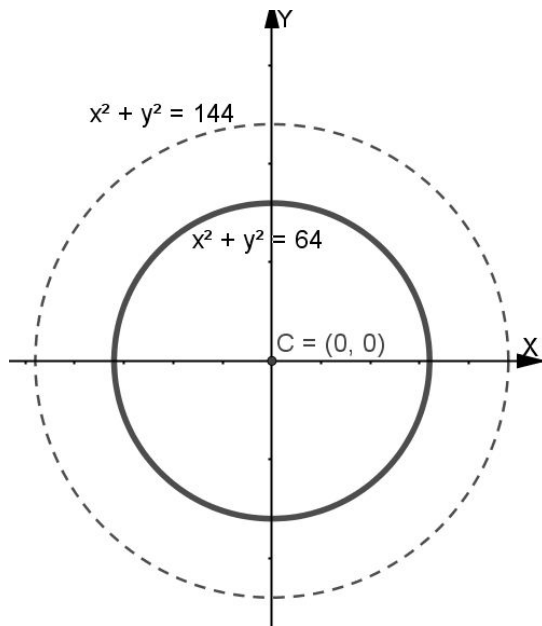
EJERCICIO N°9:

-
- $AB = 7,838367177\ m$



EJERCICIO N°10:

•



- $S = 230,3834613 \text{ m}^2$
- 91,66...%

SUPERFICIE ESFÉRICA:

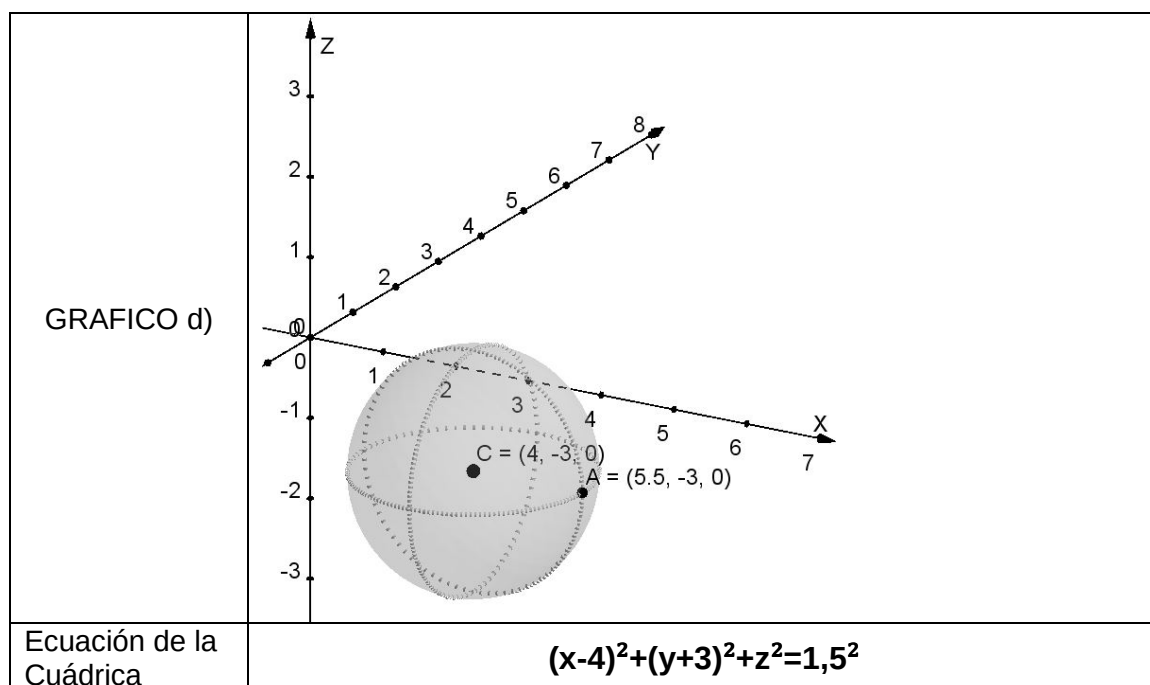
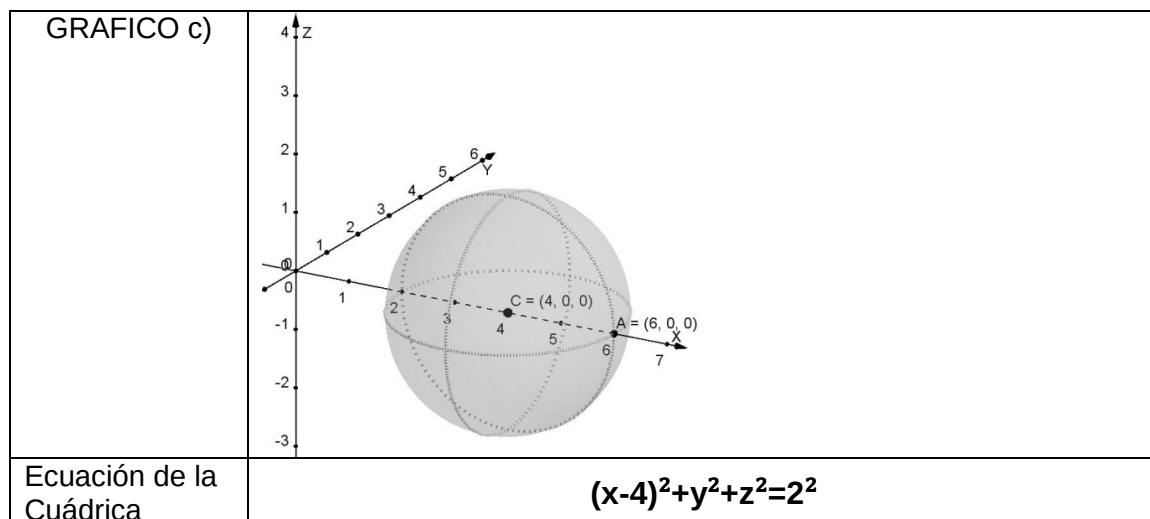
EJERCICIO N°1:

	GRAFICO	Ecuación de la Cuádrica
a)		$x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
b)		$x^2 + y^2 + z^2 = 36$

c)		$(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 2,5^2$
d)		$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 16$

EJERCICIO N°2:

GRAFICO a)		
Ecuación de la Cuádrica		$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$
GRAFICO b)		
Ecuación de la Cuádrica		$(x-3)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 3^2$



EJERCICIO N°3:

Completar Tabla

	Intersección con Ejes	Traza XY	Traza XZ	Traza YZ
$x^2 + y^2 + z^2 = 25$	a(5;0;0) a'(-5;0;0) b(0;5;0) b'(0;-5;0) c(0;0;5) c'(0;0;-5)	$x^2 + y^2 = 25$	$x^2 + z^2 = 25$	$y^2 + z^2 = 25$
$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$	a(3;0;0) a'(-3;0;0) b(0;3;0) b'(0;-3;0) c(0;0;3) c'(0;0;-3)	$x^2 + y^2 = 9$	$x^2 + z^2 = 9$	$y^2 + z^2 = 9$
$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$				



EJERCICIO N°4:

56,25%

EJERCICIO N°5:

$x^2 + y^2 + z^2 = 14$		$(-1; 1; 1)$
$(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1$		$(2; 2; 2)$
$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 21$		$(2; -3; 1)$
$x^2 + y^2 + z^2 = 3$		$(1; 1; -1)$

EJERCICIO N°6:

RESOLUCION:

$$X^2 + Y^2 = 170^2$$

$$r = 170 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 2 \pi r = 2 \cdot \pi \cdot 170 \quad \text{Perímetro} = 1068,14 \text{ cm} = 10,6814 \text{ m}$$

EJERCICIO N°7:

- NO REGLADA-CUADRICA CON CENTRO-SUP. ESFÉRICA

$$x^2 + y^2 + z^2 = 38^2$$

- $x^2 + y^2 = 37,84^2$ (traza); ÁREA = 4498 m^2

EJERCICIO N°8:

- NO REGLADA-CUADRICA CON CENTRO- SUP. ESFÉRICA

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7,5^2$$

- $x^2 + y^2 = 7,3^2$ (intersección para $h = 1,7$)
PERIM = $45,897 \text{ m}$

EJERCICIO N°9:

- $x^2 + y^2 + z^2 = 17,5^2$
- $x^2 + y^2 = 150$; $r^2 = 150$; ÁREA = $\pi \cdot 150$; ÁREA = $471,24 \text{ m}^2$

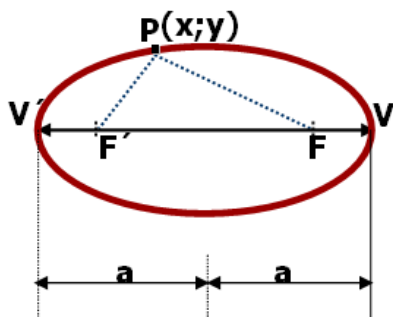
ELIPSE - ELIPSOIDE DEL PLANO (2D) AL ESPACIO (3D)

Por
CLARISA LANZILLOTTO

LA ELIPSE:

Geoméricamente es una sección cónica cerrada como ya estudiamos en el capítulo anterior.

A la luz de la Geometría Analítica, **la elipse** es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que **la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos (F y F') es una constante positiva e igual a la distancia entre los vértices (V y V')**, es decir, igual a la medida del eje mayor.

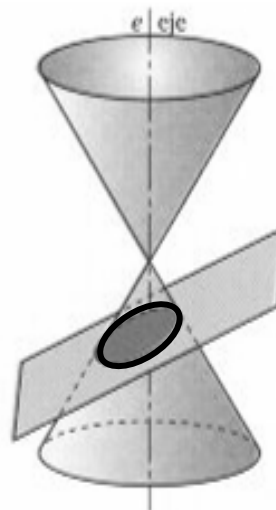


P- punto perteneciente a la elipse

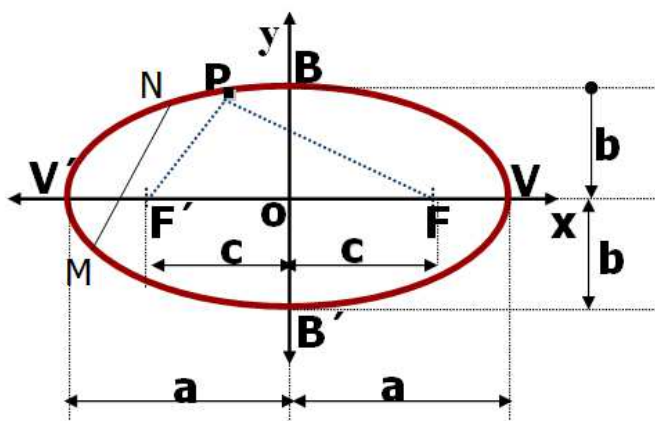
F, F' – focos

V, V' - Vértices

$$FP + F'P = 2a = \text{eje mayor}$$



ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA ELIPSE:



o: centro de la elipse

2a: diámetro mayor o eje mayor

2b: diámetro menor o eje menor

2c: distancia focal o eje focal

V, V', B, B': Vértices

F, F': Focos de la elipse

a: semieje mayor

b: semieje menor

c: semieje focal

MN: cuerda

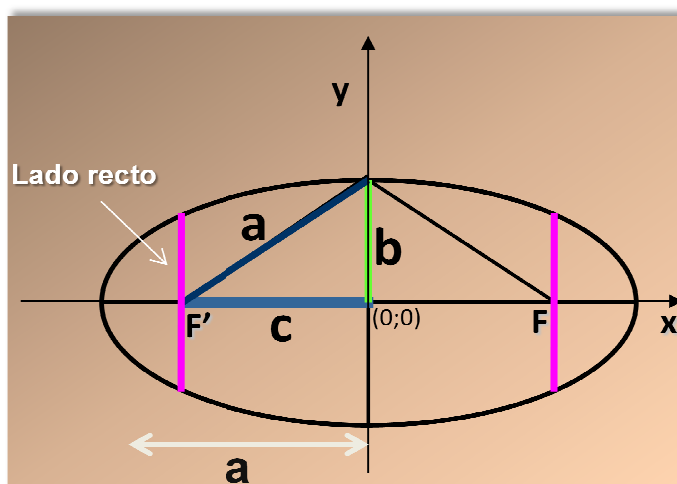
Sobre el «eje mayor» se ubican los focos. El punto **P** puede estar ubicado en cualquier lugar del perímetro de la elipse.

■ LADO RECTO DE LA ELIPSE y EXCENTRICIDAD

Se denomina *latus rectum* (lado recto) de la elipse a la cuerda perpendicular al eje mayor por uno de los focos.

Su longitud es :

$$2b^2/a$$



Además, en toda elipse se verifica que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Es decir, que conociendo dos semiejes, podemos encontrar el tercer semieje y construir la elipse.

En cuanto a la **excentricidad**, la excentricidad (**e**) de una elipse es la razón entre su

semidistancia focal (**c**) y su semieje mayor (**a**) . Por tanto, su valor se encuentra entre 0 y 1.

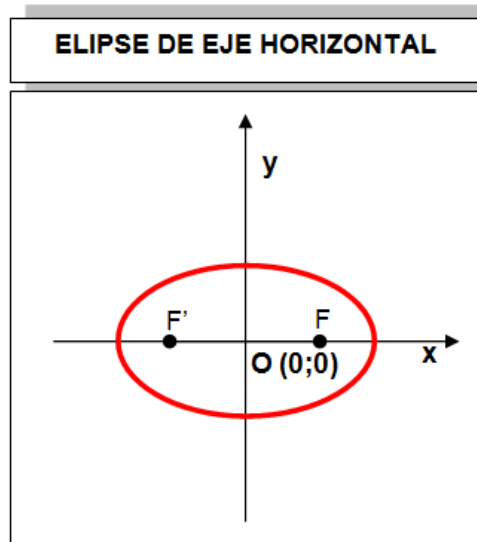
$$e = \frac{c}{a} \quad c < a \Rightarrow 0 \leq e < 1$$

A medida que los focos se

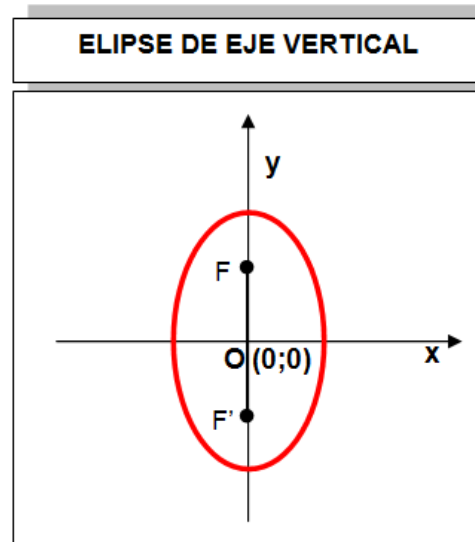
a A medida que los focos se acercan al centro de una elipse, la excentricidad se aproxima a 0, las elipses son más redondas. Si los focos se acercan a los Vértices principales, la excentricidad se aproxima a 1, las elipses son más aplastadas.

En el estudio de las formas de la ecuación, consideraremos elipses posicionadas en el plano cartesiano centradas o con centro desplazado del origen. Observamos cómo se ubican los semiejes a y b según se trate de elipses de eje horizontal o vertical.

- ECUACIÓN DE LA ELIPSE EN COORDENADAS CARTESIANAS CON CENTRO EN EL ORIGEN DEL SISTEMA



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

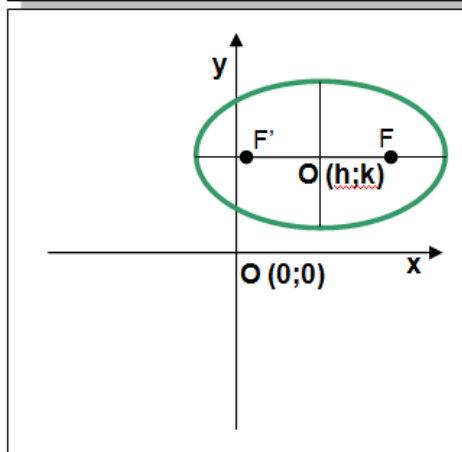


$$\leftarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

**ECUACIÓN
CANÓNICA**
donde $a > 0$ y $b > 0$. a y b
son los semiejes de la elipse
El centro de la elipse coincide
con el origen del sistema de
coordenadas

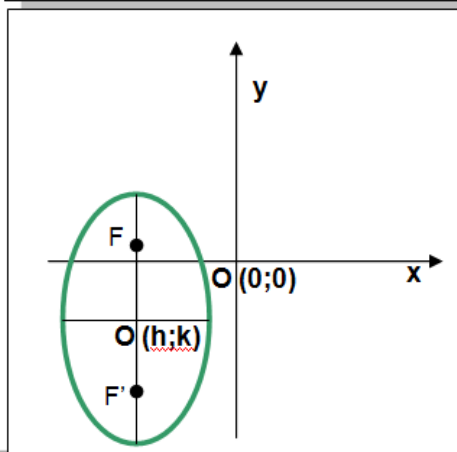
- **ECUACIÓN DE LA ELIPSE EN COORDENADAS CARTESIANAS CON CENTRO NO COINCIDENTE CON EL ORIGEN DEL SISTEMA**

ELIPSE DE EJE HORIZONTAL



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

ELIPSE DE EJE VERTICAL



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

ECUACIÓN GENERAL

donde $a > 0$ y $b > 0$. a y b son los semiejes de la elipse.
El centro de la elipse NO coincide con el origen del sistema de coordenadas

Recordamos que las ecuaciones nos permiten conocer la posición de puntos de la cónica según sus coordenadas.

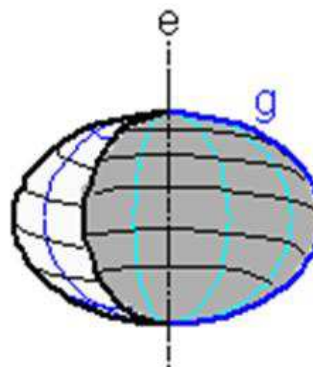
De las elipses podremos calcular **el área** que encierra y **el perímetro aproximado**, cuyas expresiones están disponibles en las Fórmulas de Aplicación preparadas por la Cátedra.

Para ampliar conocimientos referidos a Elipse como a cualquier sección cónica, encontrarás material en el aula Moodle de la Cátedra

EL ELIPSOIDE:

Esta superficie curva cerrada está engendrada por una elipse que es generatriz del elipsoide.

Puede obtenerse al «deformar» una superficie esférica, mediante una transformación homológica, en la dirección de sus tres diámetros ortogonales. O a la inversa puede considerarse a la superficie esférica como un caso particular de elipsoide.



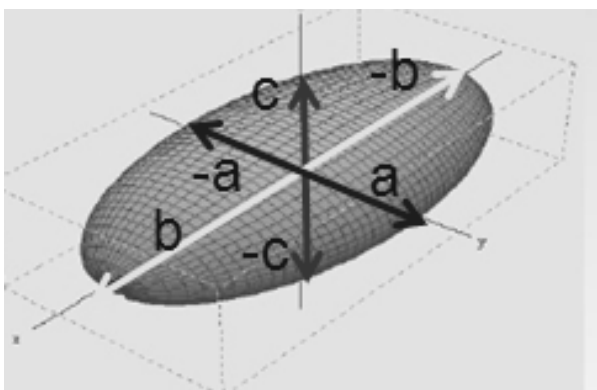
Elipsoide

Pertenece a la familia de superficies No Regladas o Curvas y al grupo de las Cuádricas con Centro.

A la luz de la Geometría Analítica, **un elipsoide** es la superficie que en un sistema cartesiano de coordenadas se determina por la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Observamos que todos los términos de la ecuación **son positivos**.



a, b y c son los semiejes del elipsoide.

Los seis puntos de intersección del elipsoide y los ejes coordenados son **los vértices**.

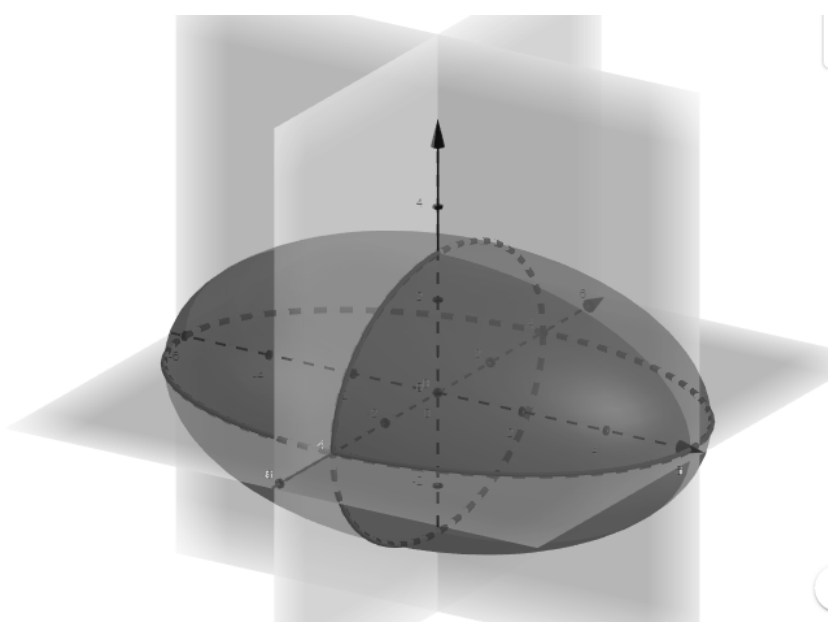
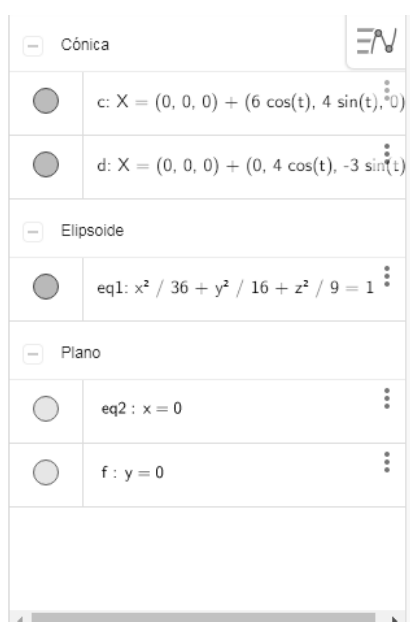
La superficie es **simétrica** con respecto a todos los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen.

TRAZAS DEL ELIPSOIDE:

Las secciones del elipsoide por planos paralelos a los planos coordenados XY, XZ e YX y por dichos planos, son **elipses**. En el caso particular que alguno de los parámetros **a, b o c** se repita, las secciones elípticas se convierten en **circunferencias** y puede considerarse el elipsoide como engendrado por la rotación de la elipse alrededor de uno de los ejes. En este último caso el elipsoide se llama entonces **de revolución**.

Al igual que con la superficie esférica, estudiaremos las trazas del elipsoide para $a \neq b \neq c$, por ejemplo el elipsoide de ecuación:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$



Traza plano XY: ELIPSE de ecuación:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Traza plano XZ: ELIPSE de ecuación:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$

Traza plano YZ: ELIPSE de ecuación:

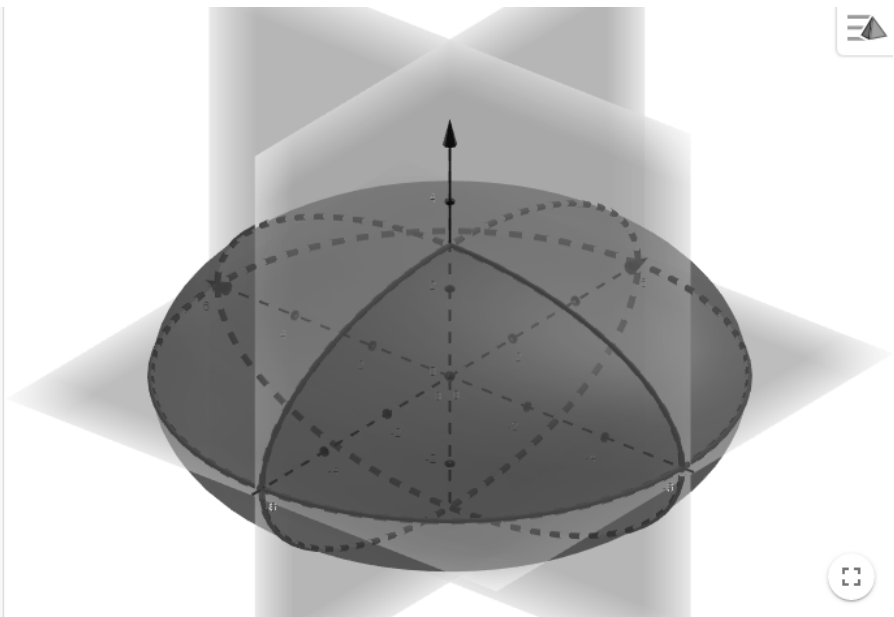
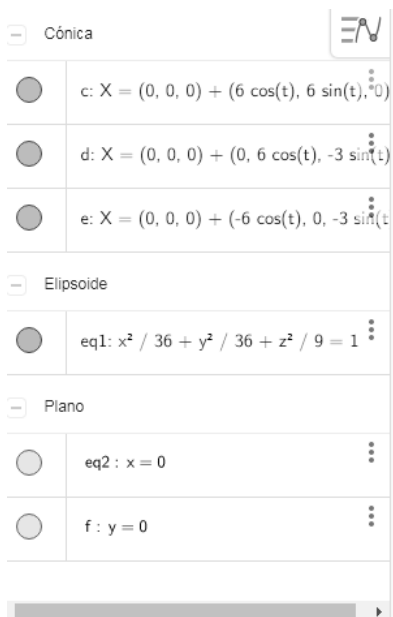
$$\frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$

Si dos parámetros son iguales, el elipsoide es de REVOLUCIÓN, por ejemplo:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{6^2} + \frac{z^2}{3^2} = 1$$

Y la traza en XY es una circunferencia de radio $r=6$ cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$$



Las imágenes responden a los ejemplos y están construidas con Geogebra. En la vista algebraica (a la izquierda) pueden leerse las ecuaciones. Consideraremos en general elipsoides centrados en el origen del sistema coordenado espacial.



APLICACIONES

ELIPSE Y ELIPSOIDE

por PATRICIA CRIVELLO y
GERARDO GNAVI

EJERCICIO N° 1:

- a) La siguiente tabla cuenta con algunos datos referidos a Elipses y según éstos, se deben completar los restantes, que son incógnitas a resolver.

N	a	b	c	Centro	Focos	Ecuación	Dis- tancia Focal	LR
1	5	3		(0 ; 0)		A eje horizontal		
2						$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{y^2}{56,25} = 1$		
3		8		(0; -5)		A eje vertical		12,8
4	8			(3 ; -5)		A eje horizontal	12,5	
5		3,5		(-3,5 ; -4,5)	F (-3,5;0) F'(-3,5 ; -9)			
6						$\frac{(x-5)^2}{7^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$		
7	6				F(4,5; -1) F'(-2,5;-1)			
8		7,14		(-2; 4)	F(5 ; 4) F'(-9 ; 4)			

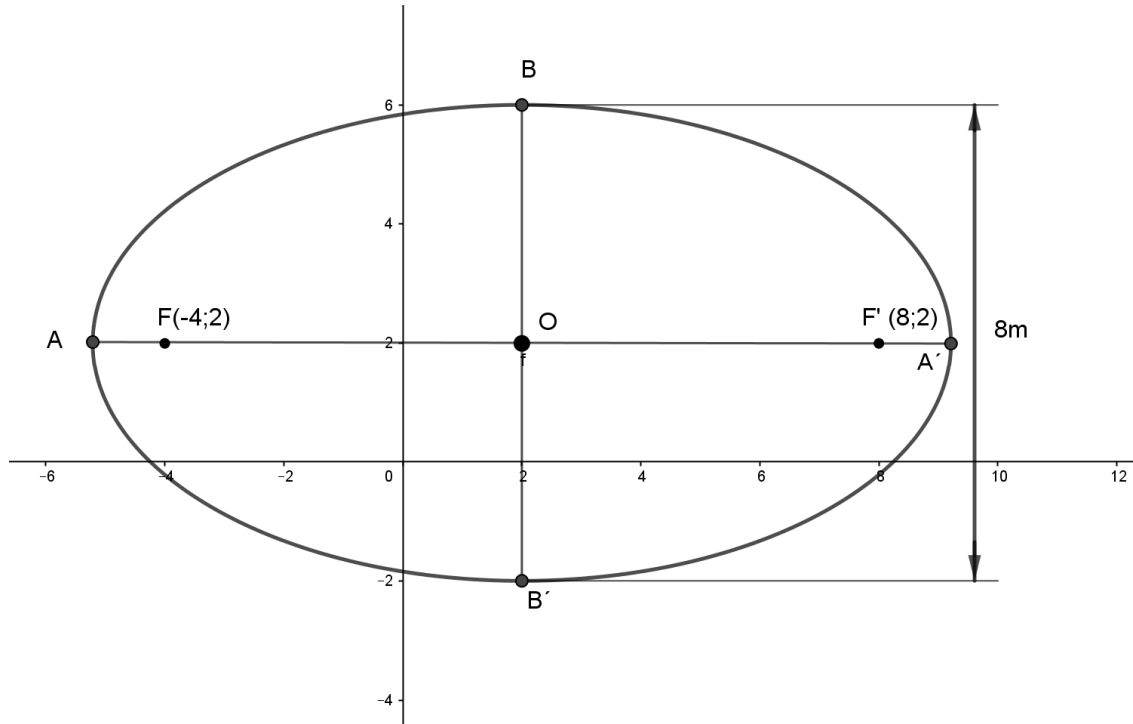
EJERCICIO N° 2:

- a) Graficar las elipses 1, 3 y 5 del ejercicio 1, indicando en cada caso coordenadas de los vértices. Calcular la excentricidad para todas las elipses.

EJERCICIO N°3:

Dado el siguiente gráfico a escala, determinar:

- Ecuación de la elipse.
- Perímetro de la elipse y área encerrada por la misma (la unidad es el metro).
- Lado Recto.
- Excentricidad.
- Coordenadas de los Vértices y del Centro.



EJERCICIO N°4:

Dadas las Coordenadas de los Focos, $F(4; -7)$ y $F'(4; 3)$ y del punto $M(-0,89; -1,55)$ que pertenece a una elipse, determinar:

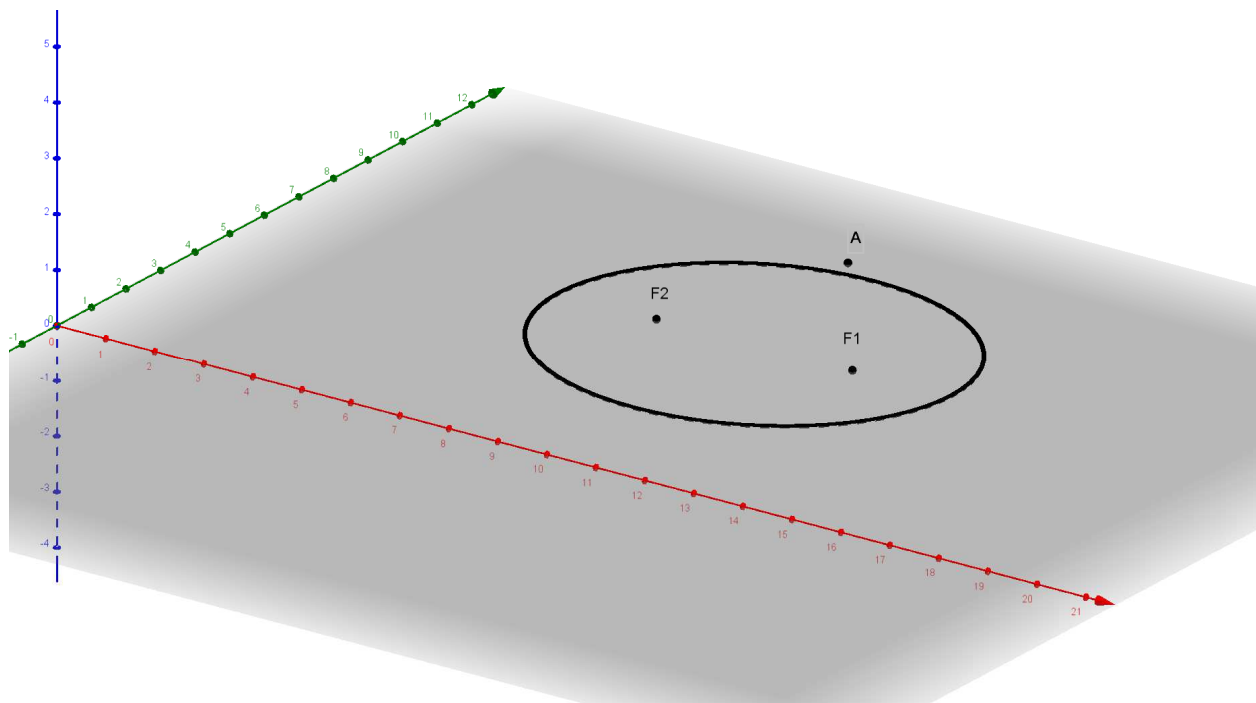
- Ecuación de la Elipse.
- El gráfico correspondiente, indicando todos sus elementos.

EJERCICIO N°5:



Fotografía: imagen propia

La fuente elíptica situada frente al patio Olmos se ubica con respecto a un sistema de ejes con origen en una de las esquinas del lugar y eje focal paralelo al eje de las abscisas. Los focos F_1 y F_2 están separados por una distancia de 4m y de ellos brota agua. Siendo las coordenadas esféricas del punto A (situado justo por encima de F_1) $A = (13,747; 26,558^\circ; 12,605^\circ)$ y siendo el eje mayor de la fuente de 8 m, encontrar la ecuación de la elipse con respecto a los ejes cartesianos x e y , ubicados a nivel de la calle (altura $z = 0$).

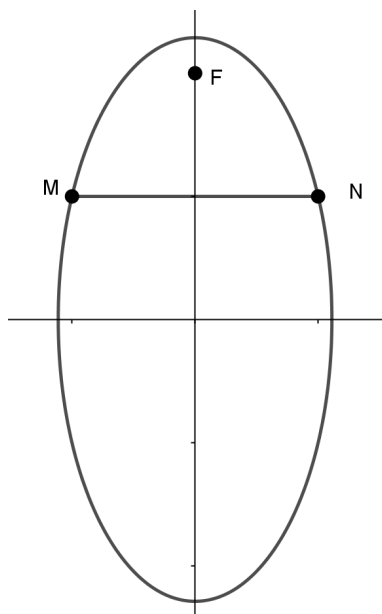


EJERCICIO N°6:

El área de la plaza elíptica de la figura - que está centrada en el origen de un SCC - es de 12100 m^2 , su eje mayor es igual a 180m y es coincidente con el eje de ordenadas. Determinar:

- Ecuación de la elipse.
- Longitud de un escenario **MN** que se colocará en el punto medio entre el centro de la elipse y el Foco F.
- Excentricidad.
- El gráfico correspondiente indicando coordenadas de focos y vértices.

Plaza Seúl, Corea del Sur. Imagen extraída de Wikipedia



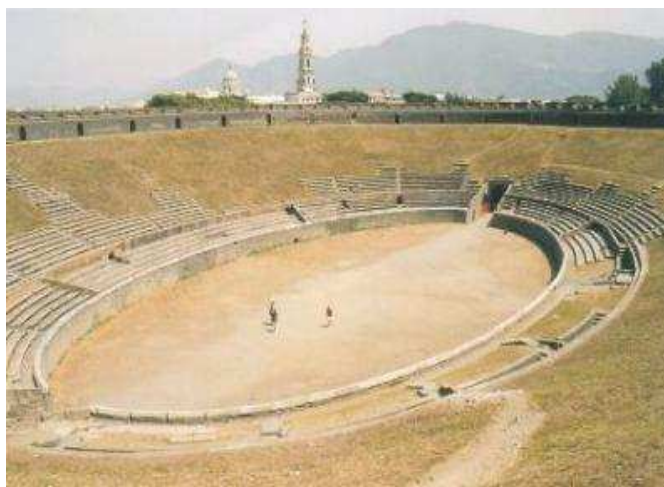
EJERCICIO N° 7:

La ecuación de la elipse menor de la figura es: $\frac{x^2}{1225} + \frac{y^2}{2862,25} = 1$

Si la superficie encerrada por la elipse mayor = $10759,95484 \text{ m}^2$ y su eje mayor = 137 m .

Se pide:

- Determinar la ecuación de la elipse mayor.
- Porcentaje del área que encierra la elipse menor respecto al área encerrada por la elipse mayor.
- Determinar la(s) ordenada(s) de los puntos P y Q de abscisa $=15$ que pertenecen a la elipse mayor.
- Graficar ambas elipses, indicando coordenadas de los vértices y de los focos.



Anfiteatro de Pompeya. Italia. Imagen extraída de Wikipedia.

EJERCICIO N°8:

La foto corresponde a la Plaza Elíptica de Bilbao, España. Sus focos están ubicados en: $F(46,5; -15)$, $F'(-36,5; -15)$ y su excentricidad es $e = 0,66935$. Determinar:

- Ecuación de la elipse.
- Ecuación General de la fuente central que responde a una circunferencia, cuyo radio es $= 5\text{m}$.
- Su gráfico, indicando las coordenadas de los Vértices.

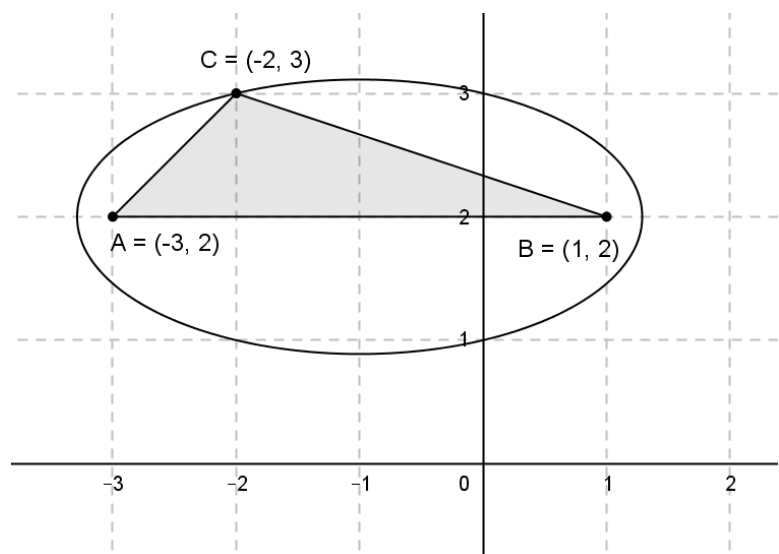


Plaza Moyúa. Bilbao, España. Imagen extraída de la Web.

EJERCICIO N°9:

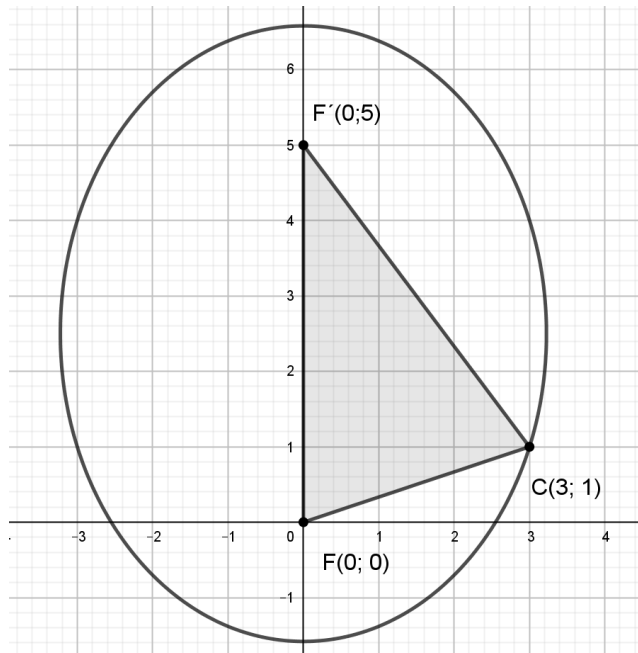
En el siguiente gráfico, F y F' son los focos y C es un punto de una elipse. Con esta información determinar:

- Ecuación de la elipse.
- Coordenadas de los vértices.
- Perímetro del triángulo ABC en metros.
- Área del triángulo ABC en m^2 .



EJERCICIO N° 10:

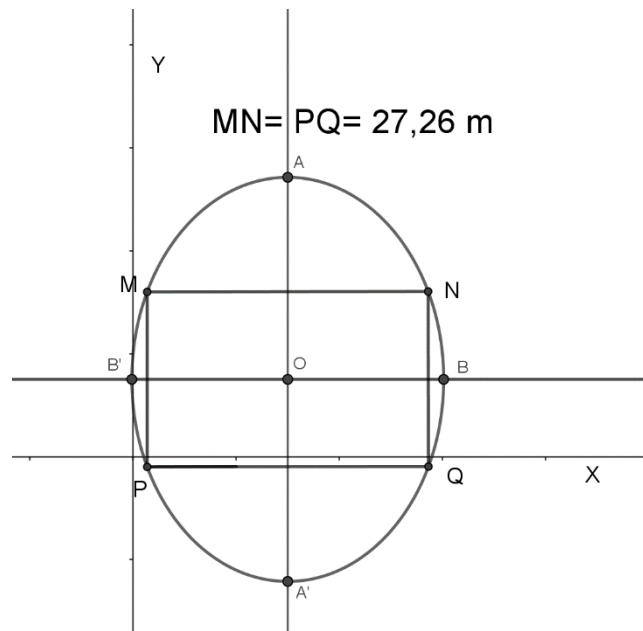
Responder las preguntas del ejercicio anterior en la siguiente situación:



EJERCICIO N°11:

En el siguiente gráfico, la elipse encierra un área= $1178,0972\text{m}^2$, es tangente al eje de las ordenadas y además tiene su centro en $O(15;7,5)$. Se pide:

- Ecuación de la elipse.
- Módulo del rectángulo MNQP.
- Porcentaje que ocupa el área del rectángulo respecto al área encerrada por la elipse.
- Coordenadas de los vértices y focos de la elipse. Coordenadas de los vértices del rectángulo.
- Graficar.





EJERCICIO N° 12:

- a) Completar la siguiente tabla, teniendo en cuenta que los datos corresponden a elipsoides.

N	a	b	c	Cen- tro	Intersec- ción con ejes	Ecuación	Trazas
1	5	3	1	(0;0;0)			
2						$\frac{(x + 2)^2}{25} + \frac{(y - 3)^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$	
3				(0;0;0)	a(7;0;0) a'(-7;0;0) b(0;2;0) b'(0;-2;0) c(0;0;9) c'(0;0;-9)		
4				(0;0;0)			XY: circunfe- rencia de radio= 8 XZ: elipse: Eje menor b= 4 YZ: elipse
5							
6					a(8;0;0) a'(-8;0;0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{121} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	YZ: elipse. Semi eje Menor=7

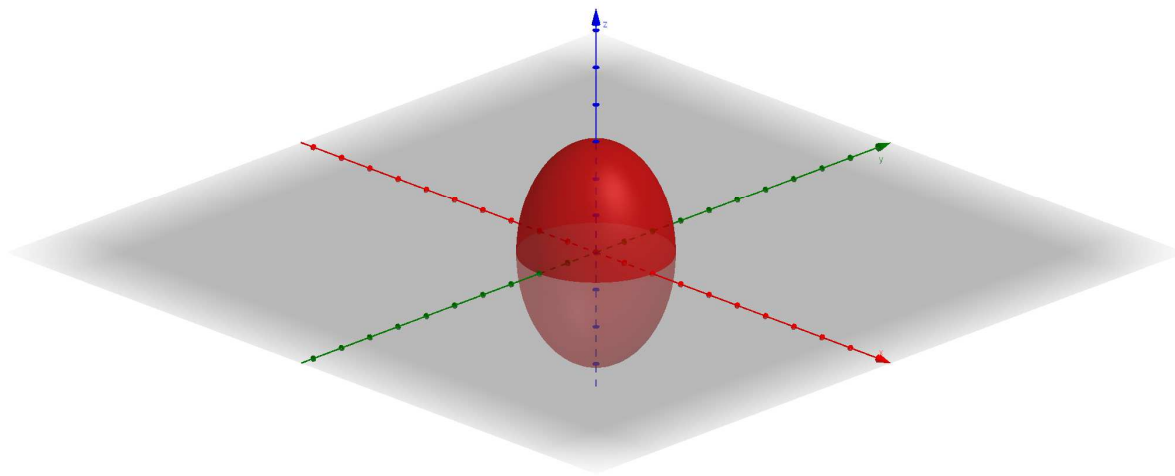
EJERCICIO N° 13:

Graficar los elipsoides del ejercicio anterior, indicando las intersecciones con los ejes coordinados en los casos que el centro del elipsoide coincida con el origen de S.C.C.

EJERCICIO N° 14:

El elipsoide de la figura revoluciona con respecto al eje “z” siendo sus vértices los puntos (0; 0; 3) y (0; 0; -3). La traza del elipsoide en el plano YZ es una elipse que encierra un área de 18,849 m². Con estos datos se pide:

- Determinar la ecuación del elipsoide.
- Calcular las coordenadas de un punto perteneciente al elipsoide, por encima del plano XY, tal que su proyección sobre dicho plano es el punto (1,5 ; 1; 0).



EJERCICIO N°15:

Dado el elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{10} = 1$, responder V o F:

- Los puntos (0; 0; 7) y (0; 0; -7) son algunos de sus vértices.....
- No es de revolución.....
- El punto (0; 0; 10) pertenece al elipsoide.....
- El punto (5; -7; 0) pertenece al elipsoide.....
- La traza en el plano YZ es una elipse que tiene un foco en el punto (0; 6,24; 0).....
- El punto (2; -3; 2,5618) pertenece al elipsoide.....
- La traza en el plano XY es una elipse que tiene un foco en el punto (4,8989; 0; 0).....

EJERCICIO N°16:

El Sunrise Kempisky Hotel (Beijing, 2015) puede verse como un elipsoide tal que si suponemos el origen del SCC en el centro geométrico de la cuádrica, la ecuación que describe a la figura es: $\frac{x^2}{2025} + \frac{y^2}{256} + \frac{z^2}{2025} = 1$. La planta baja interseca en el piso con el plano de ecuación $z = -40$. Con esta información, se desea calcular **el área** en m^2 de dicha planta baja.



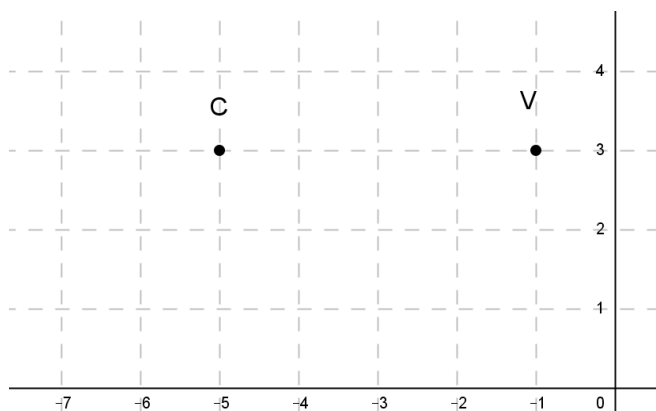
Foto extraída https://www.detectahotel.com/Hotel/Sunrise_Kempinski_Hotel_Beijing.htm

EJERCICIO RESUELTO:

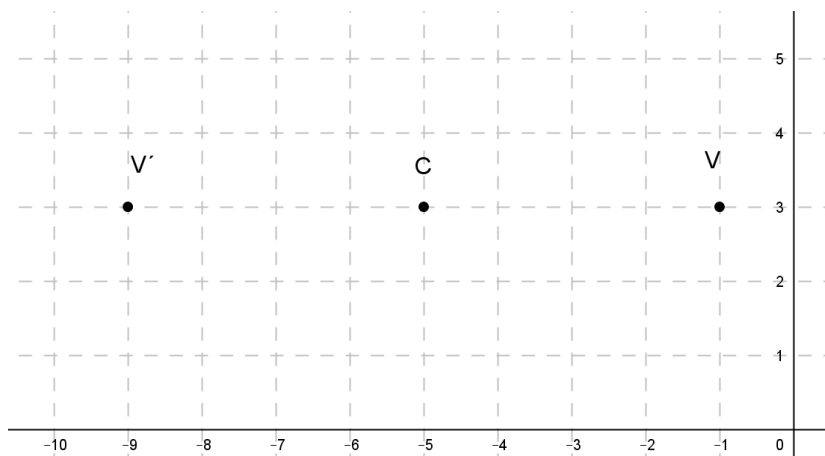
Una elipse de excentricidad $e = 0,75$ tiene su centro en el punto $C (-5; 3)$. Sabiendo que la elipse está ubicada a eje horizontal y que uno de sus vértices es el punto $V (-1; 3)$, se desea saber **la ecuación de la elipse** señalando **coordenadas de los focos y de los vértices**. Mostrar gráficamente.

SOLUCIÓN:

En primer lugar hacemos un gráfico esquemático con la información disponible, a fin de aproximarnos al problema:



Resulta evidente que $a = |-5 - (-1)|$ o sea que **$a = 4$** . Eso permite ubicar otro vértice V' en $(-9; 3)$ con lo que tenemos más conocimiento del problema:



Ahora utilizamos los datos de excentricidad y el valor de “a” para calcular “c”:

$e = 0,75 = c/4$ de modo que $c = 0,75 \times 4 = 3$. Entonces los focos están a 3 unidades del centro “C”, es decir sus coordenadas son **F (-2; 3) y F' (-8; 3)**.

Por último, calculamos el valor del semieje “b” a partir de la fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ con lo que

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} = 2,645$$

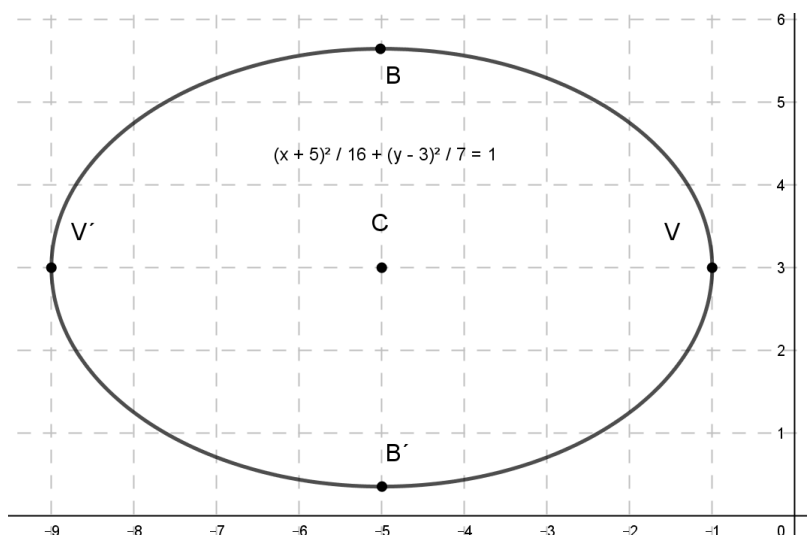
Por lo tanto los otros vértices son **B (-5; 5,645) y B' (-5; 0,355)**

La ecuación solicitada es de la forma : $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ con

$$a = 4; a^2 = 16$$

$$b = 2,645; b^2 = 7$$

$$h = -5; k = 3$$



Respuesta:

$$\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{7} = 1$$



ELIPSE Y ELIPSOIDE

AUTOEVALUACION

Responder Verdadero (V) o Falso (F) y explicar en los casos "F" cambiando el enunciado para que sea "V"

- a) Los elipsoides son superficies en el plano.....
- b) La elipse es una curva cerrada.....
- c) La ecuación canónica de la elipse a eje horizontal es:
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ siempre que sea $a < b$
- d) Un punto P (x; y) pertenece a la elipse solamente si $x = y$
- e) En una elipse de excentricidad $e = 0,5$ el eje mayor mide el doble del eje focal.....
- f) Los lados rectos de la elipse son rectas que pasan por los focos
- g) Si la excentricidad de la elipse tiene un valor muy próximo a 1, la forma de la elipse se aproxima a una circunferencia
- h) Si el centro de la elipse a eje vertical se ubica en (-5; 6), siendo $a = 5$ y $b = 3$, la ecuación de la misma es: $\frac{(x+5)^2}{3} + \frac{(y-6)^2}{5} = 1$
- i) Para verificar si un punto P (x; y) pertenece a la elipse, reemplazo sus coordenadas en la ecuación de la misma
- j) La posición de los focos de una elipse es independiente de las medidas de sus ejes.....
- k) Para que un punto pertenezca a la elipse debe cumplir que la suma de las distancias del punto a los focos sea igual al eje menor
- l) Los focos se ubican sobre el eje mayor de la elipse.....
- m) La elipse de ecuación: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ corta a los ejes coordenados en: (4; 0), (-4; 0), (0;3) y (0; 3).....
- n) Los focos de la elipse del ejercicio anterior, se ubican en: F (0; 2,65), F' (0; -2,65)...
- o) Los elipsoides son superficies regladas.....
- p) El elipsoide de ecuación: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$
 - Tiene su centro en C (0;0;0).....
 - Corta a los ejes en: (9;0;0), (-9;0;0), (0;16;0), (0;-16;0), (0;0;9), (0;0;-9).....
 - Revoluciona alrededor del eje **y**.....
 - Las trazas son todas elipses.....
- q) El elipsoide de ecuación $\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y+5)^2}{6^2} + \frac{(z-2)^2}{4^2} = 1$
 - Tiene su centro en C (-3; 5; -2).....
 - Es un elipsoide de Revolución
 - Corta al eje X en: (4,18; 0; 0), (1,82; 0; 0).....
 - Corta al eje Y en: (0; -1,25; 0), (0; -8,75; 0).....
 - Corta al eje Z en: (0; 0; 4), (0; 0; -4).....
 - El área encerrada por la traza XY es: 94,248 m².....

SOLUCIONES

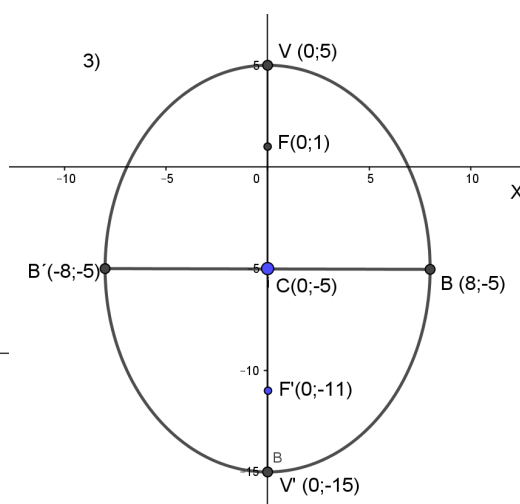
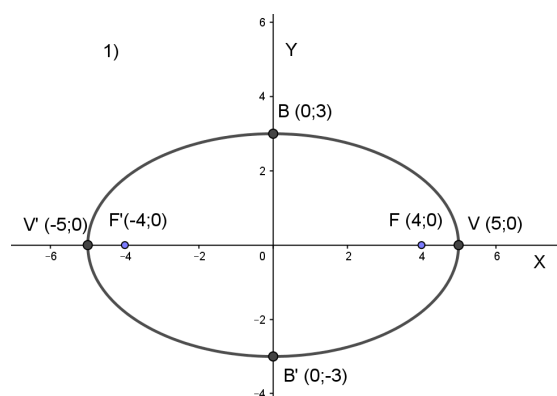
ELIPSE Y ELIPSOIDE

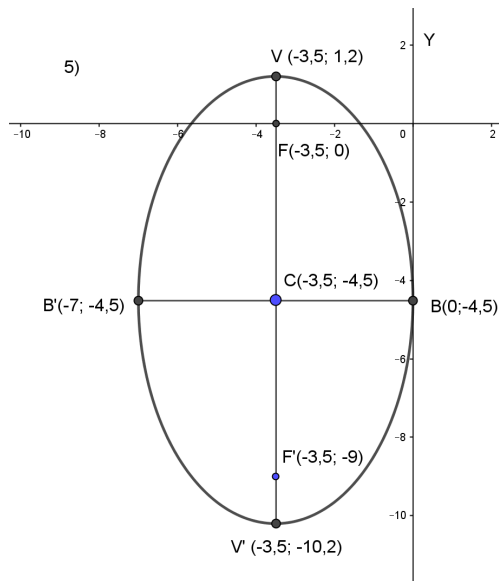
Ej. N°1:

	a	b	c	Centro	Focos	Ecuación	Distancia Focal	LR
1	5	3	4	(0 ; 0)	F (4 ; 0) F' (-4 ; 0)	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$	8	3,6
2	7,5	6	4,5	(-2 ; 0)	F (-2 ; 4,5) F' (-2 ; -4,5)	$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{y^2}{56,25} = 1$	9	9,6
3	10	8	6	(0 ; -5)	F (0 ; 1) F' (0 ; -11)	$\frac{x^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{100} = 1$	12	12,8
4	8	5	6,25	(3 ; -5)	F (9,25 ; -5) F' (-3,25 ; -5)	$\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y+5)^2}{25} = 1$	12,5	6,25
5	5,70	3,5	4,5	(-3,5 ; -4,5)	F(-3,5 ; 0) F'(-3,5 ; -9)	$\frac{(x+3,5)^2}{12,25} + \frac{(y+4,5)^2}{32,50} = 1$	9	4,30
6	7	4	5,74	(5 ; 2)	F(10,74 ; 2) F'(-0,74 ; 2)	$\frac{(x-5)^2}{7^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1$	11,48	4,57
7	6	4,87	3,5	(1 ; -1)	F (4,5 ; -1) F'(-2,5 ; -1)	$\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{23,75} = 1$	7	7,92
8	10	7,14	7	(-2 ; 4)	F (5 ; 4) F'(-9 ; 4)	$\frac{(x+2)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{50,98} = 1$	14	10,2

Ej. N°2 : Resolución Gráfica.

Excentricidad							
1	2	3	4	5	6	7	8
0,8	0,6	0,6	0,78	0,79	0,82	0,58	0,70





Ej. N°3 : a) $\frac{(x-2)^2}{52} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

b) $P = 36,6369 \text{ m}$ Área = $90,6173 \text{ m}^2$

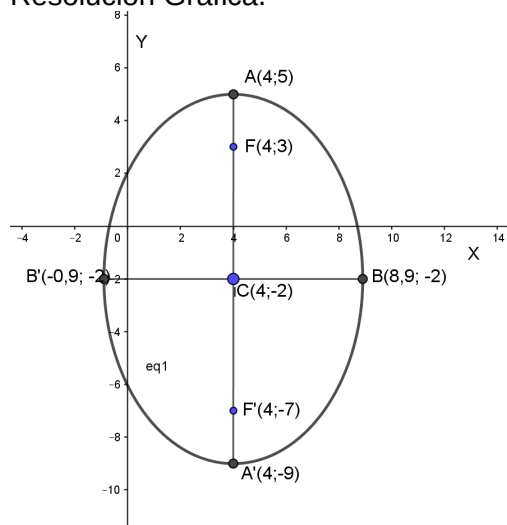
c) Lado Recto = $4,438 \text{ m}$

d) $e = 0,832$

e) Coord. Vértices $V(9,21; 2)$, $V'(-5,21;2)$, $B(2; 6)$, $B'(2; -2)$. Centro $C(2; 2)$

Ej. N°4: a) $\frac{(x-4)^2}{24} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$

b) Resolución Gráfica.



Ej. N°5 : Ecuación:

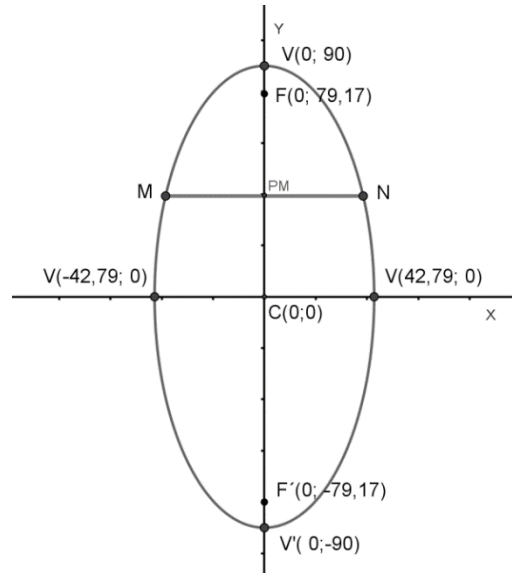
$$\frac{(x-10)^2}{16} + \frac{(y-6)^2}{12} = 1$$

Ej. N°6 : a) $\frac{x^2}{42,795^2} + \frac{y^2}{90^2} = 1$

b) $MN = 76,866m$

c) $e = 0,8797$

d) Resolución Gráfica



Ej. N°7 : a) $\frac{x^2}{50^2} + \frac{y^2}{68,5^2} = 1$

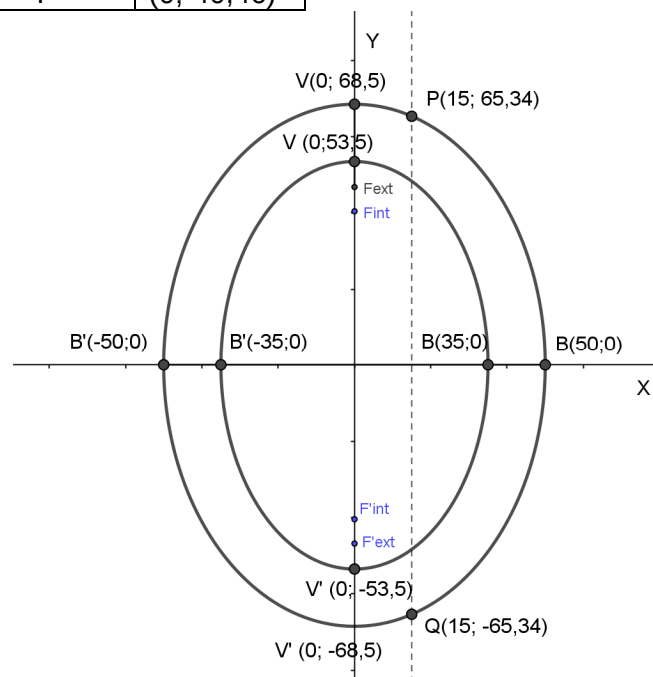
b) 54,672%

c) $P(15; 65,3448)$, $P'(15; -65,3448)$

d) Resolución Gráfica.

ELIPSE EXTERIOR	
V	(0;68,5)
V'	(0;-68,5)
B	(50;0)
B'	(-50;0)
F	(0;46,82)
F'	(0;-46,82)

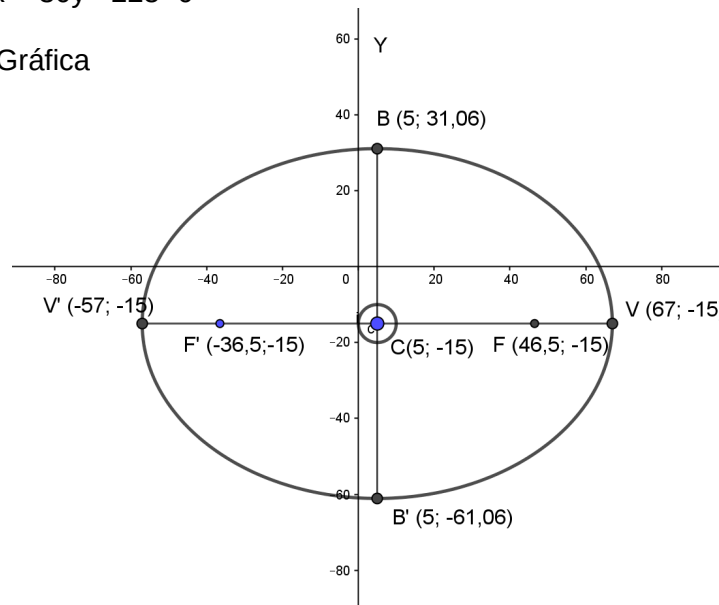
ELIPSE INTERIOR	
V	(0;53,5)
V'	(0;-53,5)
B	(35;0)
B'	(-35;0)
F	(0;40,46)
F'	(0;-40,46)



Ej. N°8 : a) $\frac{(x-5)^2}{3844} + \frac{(y+15)^2}{2121,7078} = 1$

b) $x^2 + y^2 - 10x + 30y + 225 = 0$

c) Resolución Gráfica



Ej. N°9 : a) $\frac{(x+1)^2}{5,2359} + \frac{(y-2)^2}{1,2361} = 1$

b) V (1,2882; 2), V' (-3,2882; 2), B (-1; 3,1118), B' (-1; 0,8882)

c) P= 8,5765 m

d) Área= 2 m²

Ej. N°10 : a) $\frac{x^2}{10,4057} + \frac{(y-2,5)^2}{16,6554} = 1$

b) V(0; 6,5811), V' (0; -1,5811), B(3,2258; 2,5), B' (-3,2258; 2,5)

c) P= 13,1623m

d) Área= 7,5 m²

Ej. N°11 : a) $\frac{(x-15)^2}{225} + \frac{(y-7,5)^2}{625} = 1$

b) M=1,31608

c) 83,01447 %

d) A (15; 32,5), A'(15; -17,5), B (30; 7,5), B' (0; 7,5)

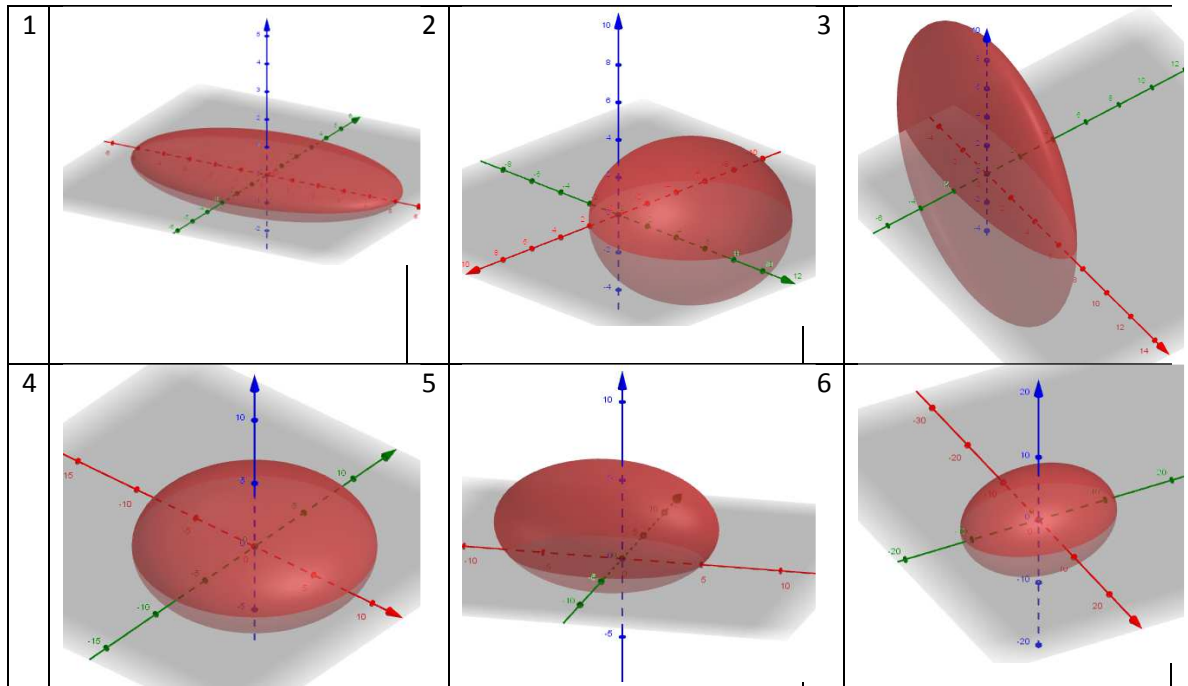
e) Resolución Gráfica.

M(1,37; 25,43)	N(28,63; 25,43)	Q(28,63; -10,43)	P(1,37; -10,43)
----------------	-----------------	------------------	-----------------

Ej. N°12:

	a	b	c	Centro	Intersección con ejes	Ecuación	Trazas
1	5	3	1	(0; 0; 0)	a (5;0;0) a'(-5;0;0) b(0;3;0)b'(0;-3;0) c(0;0;1) c'(0;0;-1)	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ Elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{1} = 1$ Elipse $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$ Elipse
2	5	5	4	(-2;3;0)	a (2;0;0) a'(-6;0;0) b (0;7,58;0) b'(0;-1,58;0) c (0;0;2,77) c'(0;0;-2,77)	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$	$\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$ $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{z^2}{10,24} = 1$ $\frac{(y-3)^2}{21} + \frac{z^2}{13,44} = 1$
3	7	2	9	(0; 0; 0)	a(7;0;0) a'(-7;0;0) b(0;2;0) b'(0;-2;0) c(0;0;9)c'(0;0;-9)	$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{81} = 1$	$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$ Elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{z^2}{81} = 1$ Elipse $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{81} = 1$ Elipse
4	8	8	4	(0; 0; 0)	a(8;0;0) a'(-8;0;0) b(0;8;0) b'(0;-8;0) c(0;0;4) c'(0;0;-4)	$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{16} = 1$	XY: circunferencia de radio= 8 XZ: elipse. Semi eje menor=4 YZ: elipse
5							
6	8	11	7	(0; 0; 0)	a(8;0;0) a'(-8;0;0) b(0;11;0) b' (0;-11;0) c(0;0;7) c'(0;0;-7)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{121} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{11^2} + \frac{z^2}{7^2} = 1$	YZ: elipse. Semi eje menor=7

Ej. N°13: Resolución Gráfica.



Ej. N°14: a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

b) (1,5; 1; 1,3)

EJ. N°15: a) F; b) V; c) F; d) F; e) V; f) V; g) F

Ej. N°16: Área = 474,7295 m²

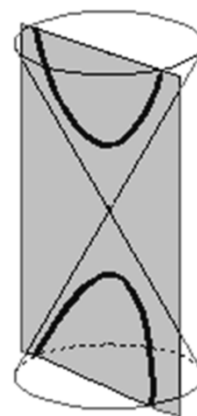
HIPÉRBOLA - HIPERBOLOIDE DEL PLANO (2D) AL ESPACIO (3D)

Por
CLARISA LANZILLOTTO

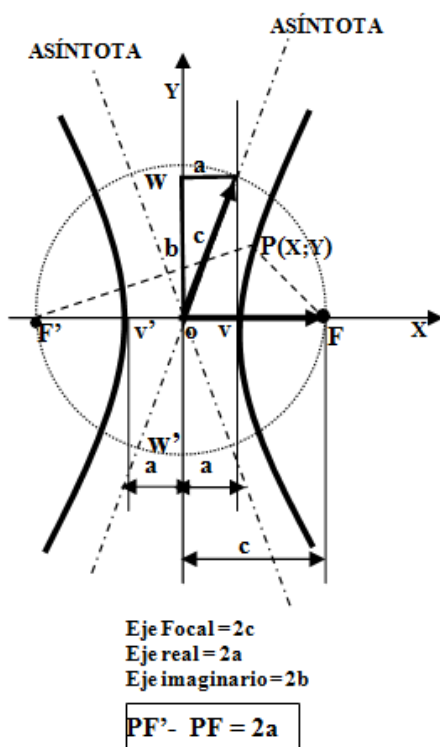
LA HIPÉRBOLA:

Geométricamente es una sección cónica abierta como ya estudiamos en el capítulo anterior.

A la luz de la Geometría Analítica, la **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos del plano **cuya diferencia de distancias a los puntos fijos llamados focos es constante**.



GRÁFICA 1



• ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

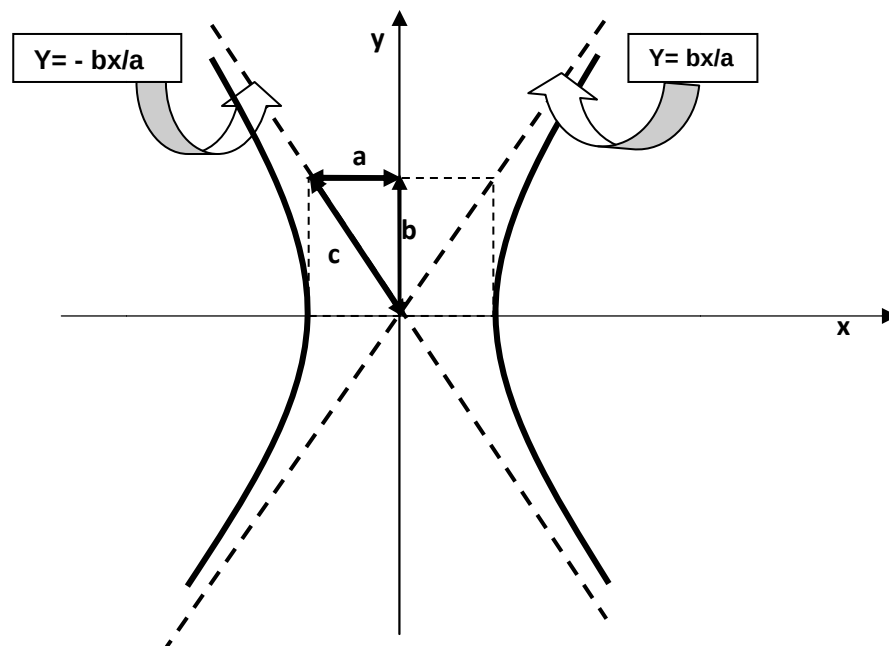
- Los puntos **F** y **F'** son los focos de la hipérbola.
- La distancia entre los puntos llamados focos se llama **distancia focal**.
- La recta determinada por los focos se llama **eje focal**.
- El punto medio **O** entre los focos se llama centro de la hipérbola.
- Los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal se llaman vértices (**V** y **V'**).
- La distancia del vértice al centro se conoce como "**a**".
- El segmento **VV'** se llama **eje principal** o **eje transverso** o **eje real** de la hipérbola, donde **VV' = 2a**.
- La **semidistancia focal** **OF = OF'** se conoce como "**c**".
- **Eje no transverso o imaginario**: es el definido por el segmento **WW' = 2b** (ver gráfica 2).
- **Eje normal**: recta que pasa por el centro de la Hipérbola y es perpendicular al eje focal.

LAS ASÍNTOTAS:

Una **recta es asíntota a una curva** cuando la distancia de un punto de la curva a la recta tiende a anularse si el punto se aleja indefinidamente sobre la curva.

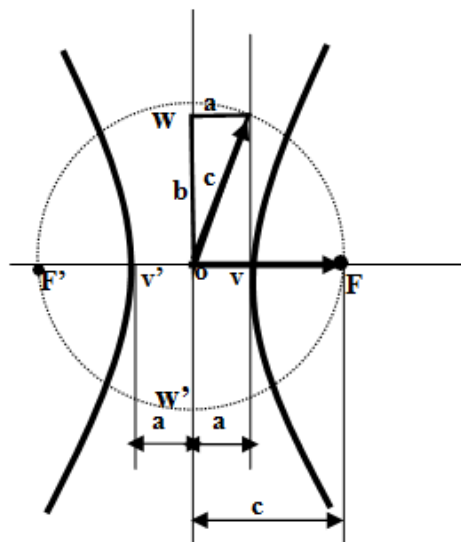
En la gráfica que sigue la hipérbola tiene dos asíntotas oblicuas cuyas ecuaciones son: **$y = bx/a$** e **$y = -bx/a$** para el caso de que la hipérbola tenga su eje transverso paralelo y coincidente con el eje de abscisas.

En el caso de que el eje transverso sea coincidente con el eje de ordenadas las asíntotas serán **$y = ax/b$** e **$y = -ax/b$** .



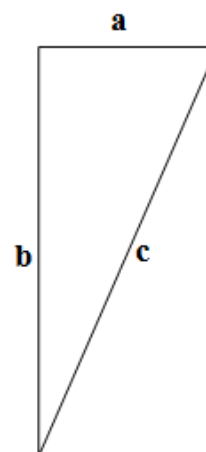
Como en la elipse, los tres semiejes **a**, **b** y **c** forman un triángulo rectángulo que permitirá, conociendo el valor de dos, encontrar el tercer semieje y resolver la hipérbola. La Gráfica muestra las relaciones entre los mismos:

GRÁFICA 2



Eje Focal = $2c$
Eje real = $2a$
Eje imaginario = $2b$

Analizando el triángulo
formado por “a”, “b” y “c”



Según Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

En cuanto a la excentricidad, en **la hipérbola es siempre $e > 1$** . Se obtiene por el cociente entre el semieje focal **c** y el semieje real **a**.

$$e > 1$$

$$e = c/a$$

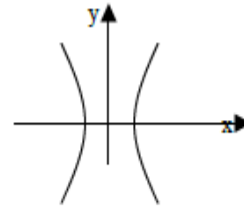
ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Estudiaremos la ecuación de la hipérbola en los siguientes casos:

Cuando el eje focal es horizontal y el centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas, y cuando el eje focal es vertical y el centro de la hipérbola coincide con el centro de coordenadas. La imagen que sigue muestra las ecuaciones correspondientes a cada caso. Observemos con atención que en la ecuación, la variable de coeficiente positivo indica al eje coordenado que contiene al eje focal.

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA CON EJE REAL COINCIDENTE CON EL DE ABCISAS

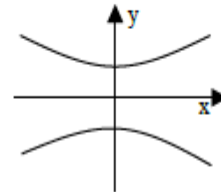
$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$



2- Cuando el eje focal es vertical y el centro de la hipérbola coincide con el centro de coordenadas del sistema referencial, la ecuación será:

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA CON EJE REAL COINCIDENTE CON EL DE ORDENADAS

$$y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$$



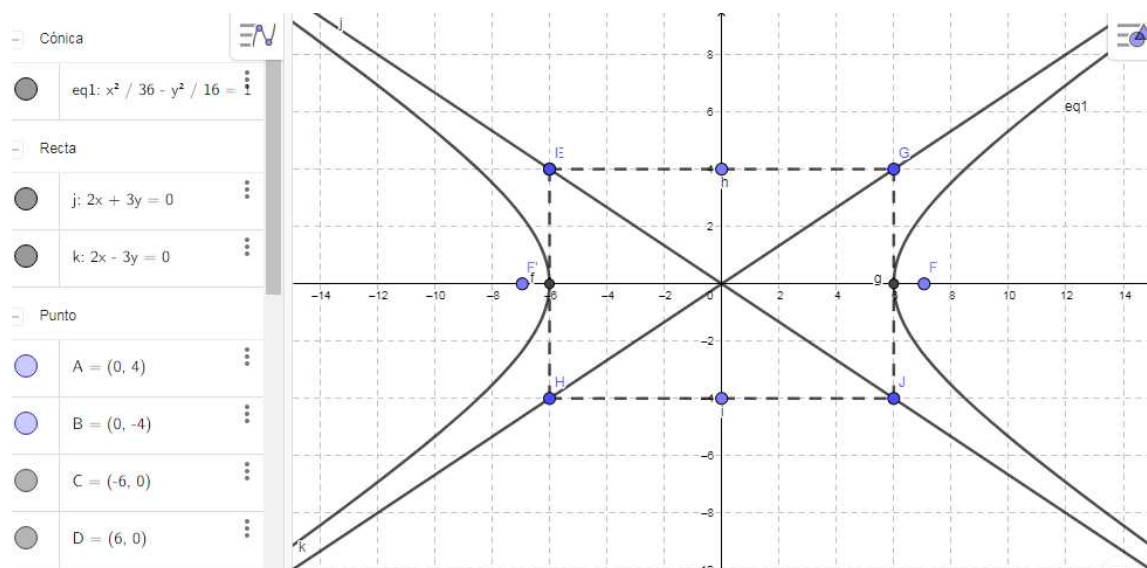
ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO DESPLAZADO DEL ORIGEN

En estos casos recordemos que las coordenadas del centro $C(h; k)$ deben estar presentes

$$(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$$

en los numeradores de los términos del primer miembro de la ecuación y según el caso, las ecuaciones serán las de la derecha.

$$(y-k)^2/a^2 - (x-h)^2/b^2 = 1$$

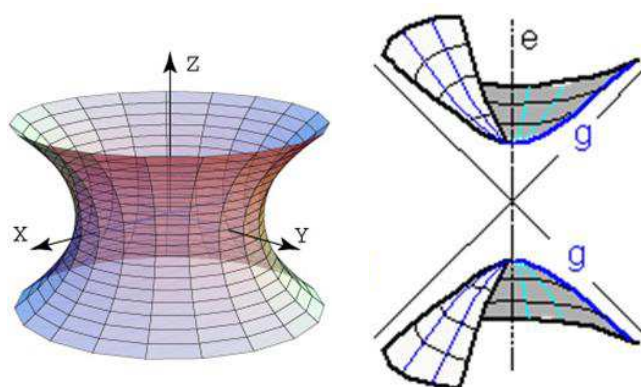


Geogebra: ejemplo de hipérbola centrada con Eje Real horizontal

LOS HIPERBOLOIDES:

Son superficies curvas engendradas por una hipérbola que es generatriz de la superficie. Los hay de una hoja y de dos hojas.

Pertenecen a la familia de las Superficies Curvas y dentro de la misma a las Cuádricas con centro



HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA:

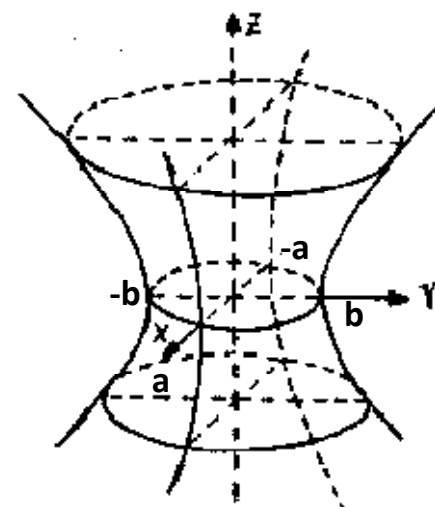
Llamamos **hiperboloide de una hoja** a la superficie que en un sistema de coordenadas cartesianas se determina por las siguientes ecuaciones canónicas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Observamos que en todos los casos, en el primer miembro de las ecuaciones hay dos términos positivos y uno negativo

Los parámetros **a**, **b**, **c** son los **semiejes** del hiperboloide de una hoja. El término negativo indica el eje de desarrollo del hiperboloide. En el caso de la figura, el eje es **z**, **por tanto la ecuación que le corresponde es:**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Las intersecciones con los ejes coordenados son justamente los semiejes $\pm a$ y $\pm b$, respectivamente y no hay intersecciones con el eje **z**.

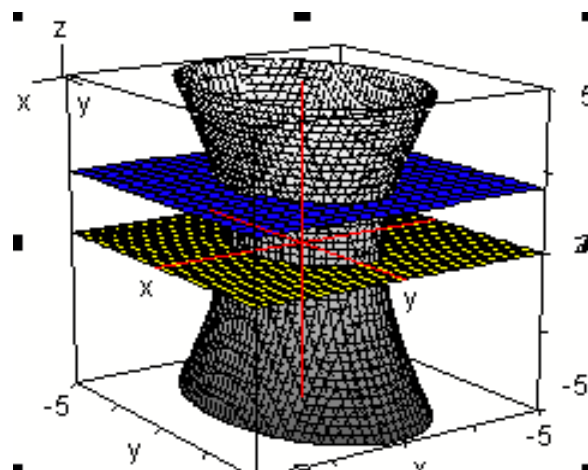
La **superficie es simétrica** con respecto a todos los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen. Tomamos como ejemplo a un hiperboloide con eje de desarrollo en **z**, haciendo el análisis extensivo a los hiperboloides desarrollados en **x** o en **y**

TRAZAS DEL HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA:

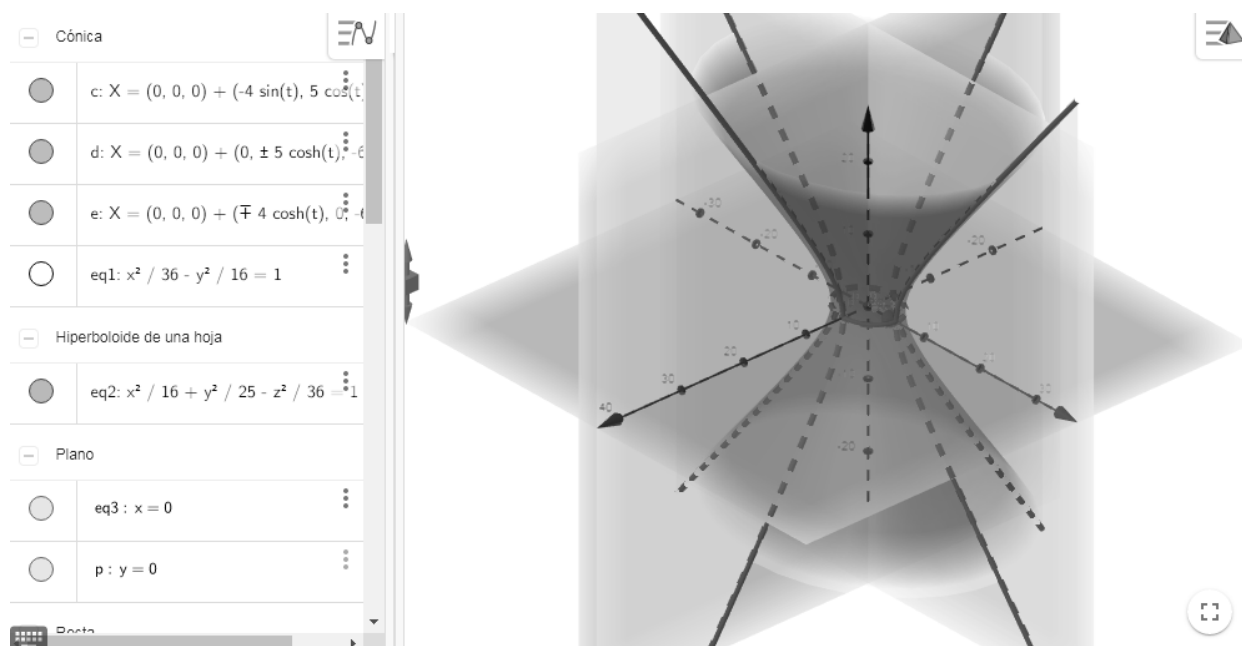
Traza plano XY: ELIPSE de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si seccionamos la figura por planos paralelos al



plano XY, las secciones son elipses semejantes. La elipse determinada por el plano XY es la menor de todas las posibles y recibe el nombre de **elipse de garganta**. Si $a=b$ la traza será una **circunferencia** y el hiperboloide será de **revolución**.



El gráfico construido en Geogebra muestra las intersecciones entre el hiperboloide de una hoja y los planos coordenados XZ e YZ que son hipérbolas. Puede observarse la ecuación del hiperboloide en la vista algebraica.

Traza plano XZ: HIPÉRBOLA de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza plano YZ: HIPÉRBOLA de ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

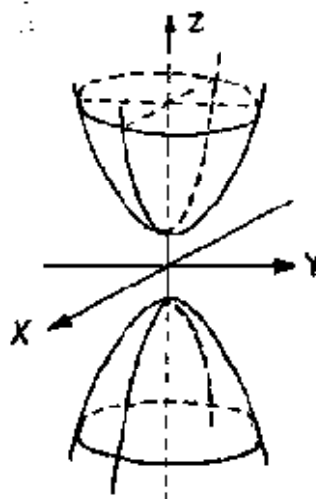
Las intersecciones del hiperboloide con planos paralelos al plano XZ e YZ, son también hipérbolas.

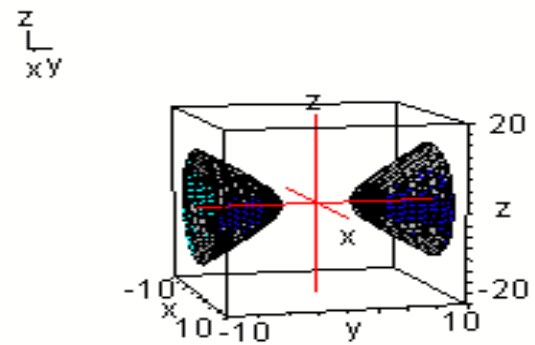
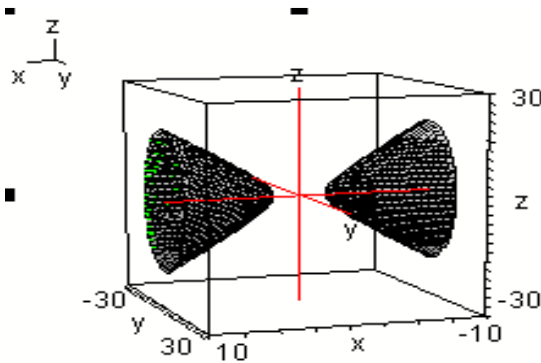
HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS:

Es una superficie muy particular. En un sistema de coordenadas cartesianas se determina por la ecuación canónica de la forma:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dos coeficientes negativos y uno positivo que representa un **hiperboloide de dos hojas desarrollado según el eje z**. Al igual que el hiperboloide de una hoja hay otras dos formas canónicas de la ecuación, con desarrollo en **eje y** o **eje x**. Recordamos que el término positivo indica el eje de desarrollo.





Las imágenes muestran hiperboloides de dos hojas con ejes de desarrollo en x e y . La superficie **es simétrica** con respecto a todos los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen.

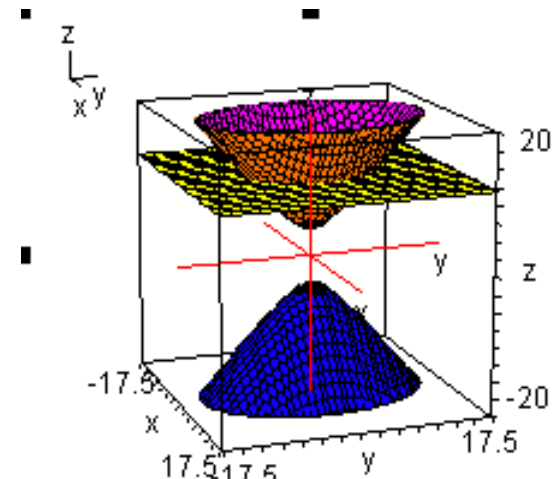
TRAZAS DEL HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS:

Tomamos como ejemplo el que responde a la ecuación:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

PLANO XY:

No tiene traza en el plano coordenado XY. Sin embargo si consideramos planos paralelos al plano XY **para valores de $z > c$ o $z < -c$ obtenemos elipses.** Para $z=c$ o $z=-c$ la intersección de un plano paralelo a XY con la superficie es un punto.



Traza plano XZ: HIPÉRBOLA de ecuación:

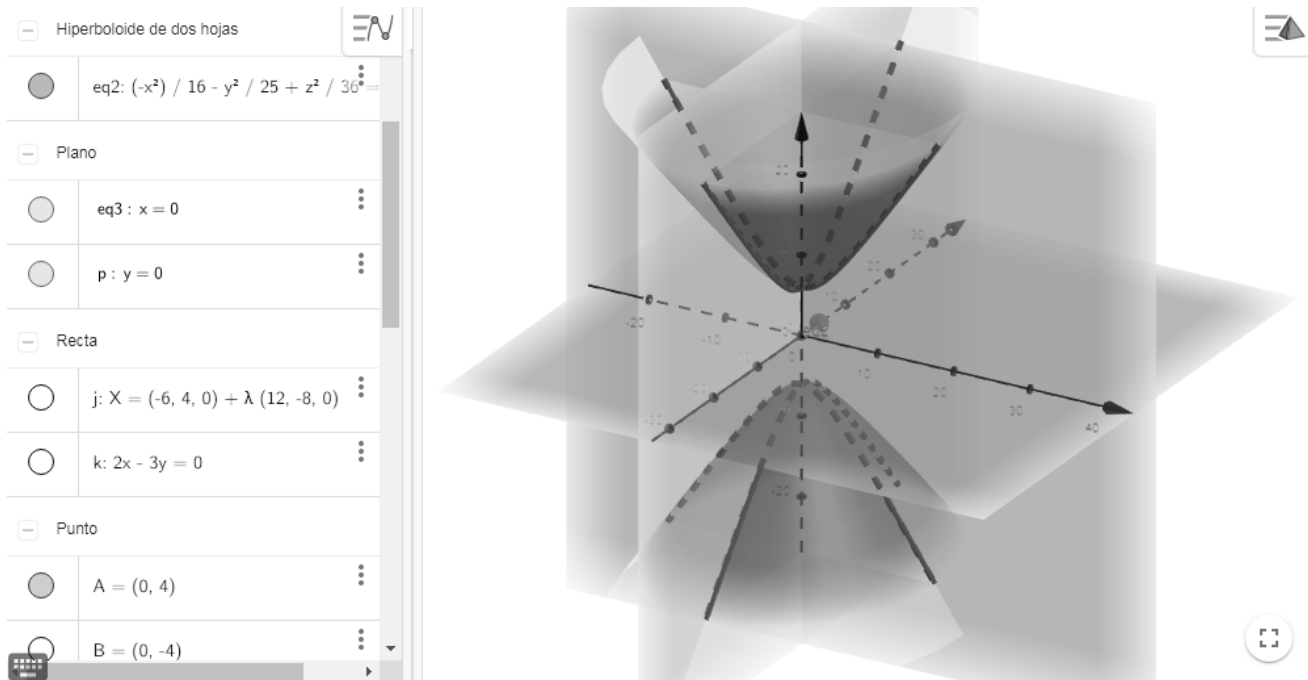
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Traza plano YZ: HIPÉRBOLA de ecuación:

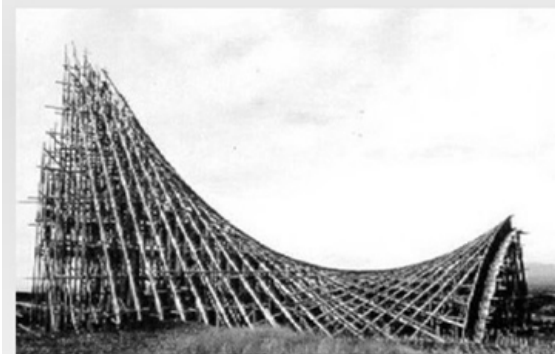
$$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

También son hipérbolas las intersecciones según planos paralelos a XZ e YZ.

Si en la ecuación del hiperboloide de dos hojas **a y b tienen el mismo valor**, el hiperboloide de dos hojas es **de revolución**. Para $z > c$ o $z < -c$, las intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano XY, son circunferencias.



El gráfico muestra las hipérbolas que son trazas resultantes de la intersección de los planos XZ e YZ.



<http://www.asocluernavaca.com/historia1.html>

<https://www.construccionlatinoamericana.com/noticias/termina-restauracion-de-catedral-de-brasilia/81656.article>

<https://savoirs.rfi.fr/es/comprendre-enrichir/societe/brasilia-lutopie-capitale>



APLICACIONES

HIPÉRBOLA E HIPERBOLOIDES

por ALEJANDRO TORRES y
MIRIAM AGOSTO

HIPERBOLA

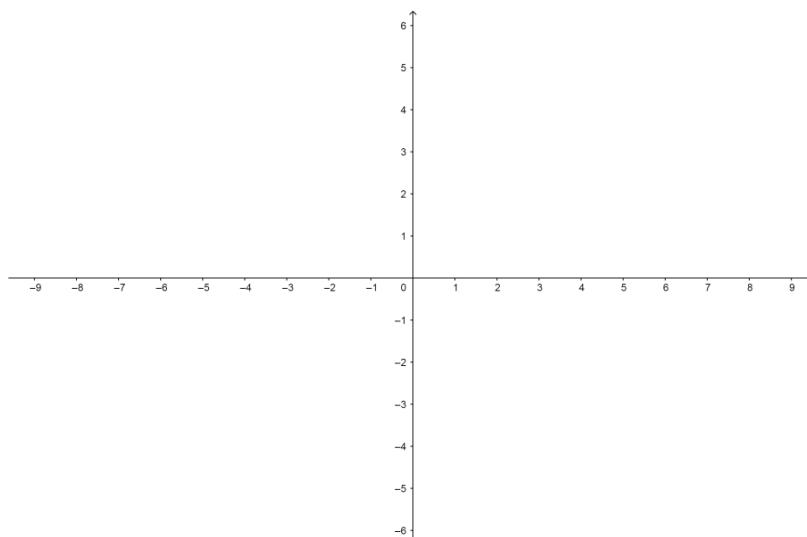
EJERCICIO N° 1:

Con los datos que aparecen en la tabla, se pide hallar la **Ecuación de la Hipérbola**.
-Graficar a escala cada una de las hipérbolas de la tabla.

	Coordenadas del Centro	Coordenadas de un foco	Coordenadas de un vértice	Ecuación:
a	(0; 0)	(6; 0)	(4;0)	
b	(0; 0)	(0;3)	(0;1)	
c	(6,5; 3)	(4; 3)	(8; 3)	
d	(-2; -3)	(-5; -3)	(-4; -3)	

EJERCICIO N° 2:

- Construir la ecuación de una hipérbola sabiendo que su vértices son los puntos: (0; 3) y (0; -1) y su excentricidad es: $e = 2$.
- Graficar la cónica en un SCC.





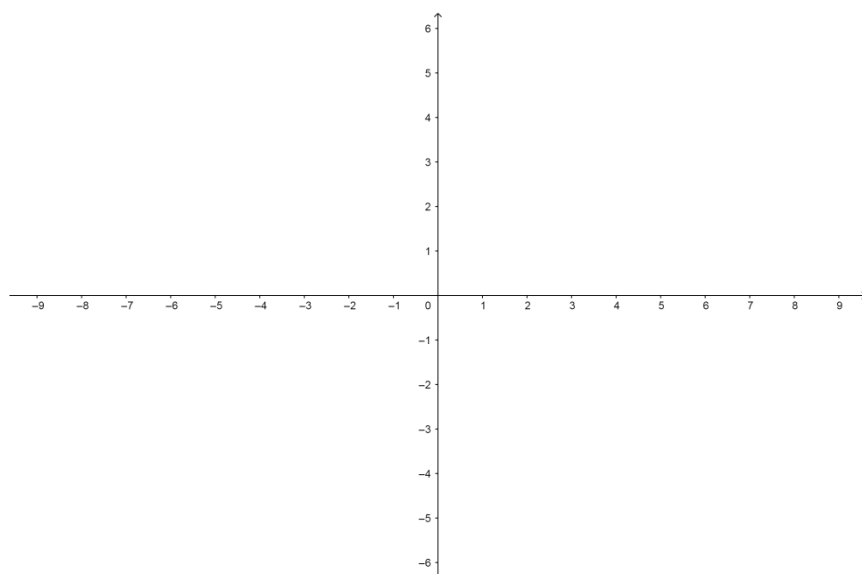
EJERCICIO N° 3:

a) Construir **la ecuación de la hipérbola** cuyo centro está en el punto $(-4; 3)$, sus vértices a 2 unidades del centro hacia la derecha y hacia la izquierda y sus asíntotas son las rectas que tienen las ecuaciones:

$$y = 2,33x + 12,31 \text{ e } y = -2,33x - 6,31.$$

b) Calcular la **excentricidad**.

c) Graficar en un SCC



HIPERBOLOIDES:

Ejercicio N°1:

Dadas las siguientes ecuaciones completar el cuadro indicando en cada caso: el nombre de la superficie, sus trazas con los planos coordenados e indicar cuál es el eje de desarrollo.

Ecuación	Nombre	Traza con XY	Traza con XZ	Traza con YZ	Eje de desarrollo
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a \neq c$					
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a = c$					
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$					

Ejercicio N° 2:

La imagen corresponde al Puente peatonal en Benidorm.

Este puente peatonal se asimila a la forma de un hiperboloide de una hoja, el cual se desarrolla a lo largo del eje "y".

Sabiendo que el sistema de ejes cartesianos "x", "y", "z", tiene su centro coincidente con el de la superficie cuádrica, que su traza sobre el plano coordenado XZ es una circunferencia de radio= 2,2m y que el parámetro "b" del hiperboloide tiene un valor de 6,65 , se pide:

- Construir **la ecuación de la cuádrica**.
- Describir y graficar **la traza en el plano YZ**.



<https://jdiaz474.files.wordpress.com/2011/07/hiperboloide-42.jpg>

EJERCICIO N°3:

Definir las siguientes superficies según la clasificación estudiada. Asignar el nombre correspondiente:

a	b	c
d	e	f

EJERCICIO N°4:

En el siguiente cuadro se han tomado algunas superficies del Ejercicio 3. Completa las columnas según lo estudiado sabiendo que las superficies tienen su centro en el origen del sistema coordenado cartesiano espacial.

SUPERFICIE SELECCIONADA	DATOS	ECUACION DE LA SUPERFICIE	TRAZAS DE LA SUPERFICIE
Superficie a	La traza en el plano XY es una circunferencia		
Superficie b	Las intersecciones de la superficie con planos paralelos a XZ, son elipses.		
Superficie c	Para planos paralelos al plano XY las trazas son circunferencias.		
Superficie e	La traza en el plano XZ es una elipse.		

EJERCICIO N°5:

Indica verdadero o falso en las siguientes afirmaciones. Justifica en caso que sea falso.

a-Los hiperboloides son siempre superficies de NO REVOLUCION	V	F
b-El hiperboloide de dos hojas posee en su ecuación canónica dos coeficientes positivos.	V	F
c-Un hiperboloide de una hoja centrado en el origen del sistema es una superficie simétrica con respecto a todos los planos coordenados.	V	F
d-Las trazas de un hiperboloide de una hoja con los planos coordenados siempre son dos hipérbolas y una circunferencia.	V	F
e-El término con signo positivo en la ecuación del hiperboloide de dos hojas, indica el sentido de desarrollo de dicha superficie.	V	F

EJERCICIO N°6:

Los semiejes de un hiperboloide de una hoja desarrollado en el eje **z** son:

$$a=\sqrt{6}, b=\sqrt{2} \text{ y } c=\sqrt{3}.$$

Se pide:

a) Determinar **la ecuación del mismo**

b) Graficar la superficie en un SCC en el espacio.

EJERCICIO N°7:

Dada la ecuación $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{9} = 1$, se pide:

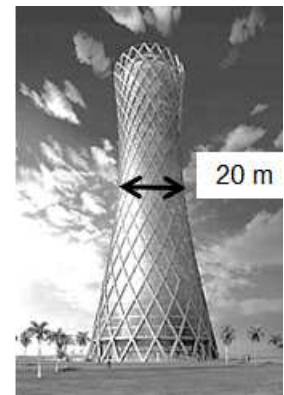
- Clasificar** la superficie.
- Definir **las trazas** de dicha superficie.
- Realizar **la gráfica** de esta superficie en un SCC en el espacio.

EJERCICIO N°8:

La Torre Tornado, originalmente llamada QIPCO Office Tower, fue construida en el 2008 pensando en que se convirtiera en un icono en la zona. Se trata de una torre en forma de hiperboloide de una hoja de 52 niveles, con una circunferencia de garganta de 20 m de diámetro ubicada a la mitad de la altura de la torre.

Si cada nivel tiene una altura de 2,50 m y el área circular de la base es de 1017,876 m², se pide:

- Dar **la ecuación del hiperboloide**.
- Graficar la superficie centrada en un SCC en el espacio, con desarrollo de la cuádrica en el eje Z.



EJERCICIO N°9:

QATAR SPORT CITY. ASPIRE TOWER es otro ejemplo de edificio cuya envolvente es un hiperboloide de una hoja. Fue diseñada por el arquitecto Hadi Simaan, en colaboración con la firma AREP, y cuando fue culminada en el 2007 fue la torre más alta de Qatar.

Se conoce que la ecuación del hiperboloide es:

$$\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{12^2} - \frac{z^2}{47.17^2} = 1$$

Se pide:

- Calcular **el área de la planta de menor diámetro** del edificio (garganta del hiperboloide), en m^2 .
- Calcular **la altura total del edificio** en metros, sabiendo que la base tiene 80 m de diámetro. La superficie es simétrica respecto a la sección de garganta.



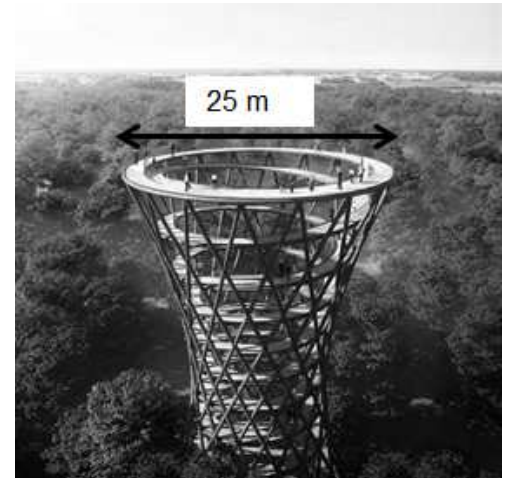
EJERCICIO N°10:

En mayo de 2018, comenzó la construcción de esta magnífica torre **en forma de hiperboloide de una hoja** que está localizada en el bosque GissselfeldKloster, a una hora de Copenhague, en Dinamarca.

Para la edificación de la estructura, se utilizó únicamente madera local, y tiene una altura total de 45 metros. Ofrece a los visitantes una vista de 360 grados del parque, y **cuenta con una pasarela panorámica a través de la copa de los árboles.**

Posee una circunferencia de garganta de 10 m de diámetro situada a mitad de la altura de la estructura. Se pide:

- Determinar **la ecuación del hiperboloide** sabiendo que está centrado en un SCC espacial y que se desarrolla en el eje "z".
- Calcular **el área de la corona circular superior**, en m^2 , que sirve de mirador, sabiendo que la corona tiene 3 m de ancho y un diámetro máximo (exterior de la corona) de 25 m como muestra el gráfico.



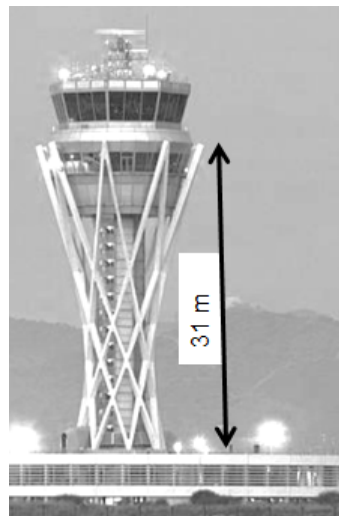
EJERCICIO N°11:

La nueva torre de control del Aeropuerto de Barcelona, tiene forma de hiperboloide de una hoja. Sus 31 metros de altura (equivale a la mitad del hiperboloide) le permiten tener la máxima visibilidad de las áreas de maniobras. La ecuación del hiperboloide es:

$$\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{4,5^2} - \frac{z^2}{35,152^2} = 1$$

Se pide:

- a) Calcular el área, en m^2 , del coronamiento superior (área de la planta superior) donde se ubica la cabina de comandos.



EJERCICIO N°12:

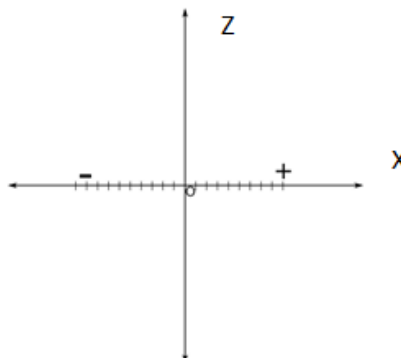
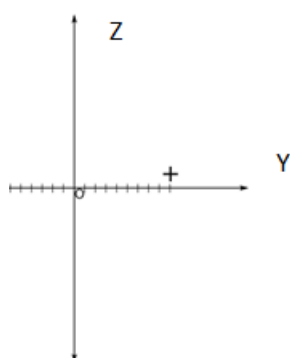
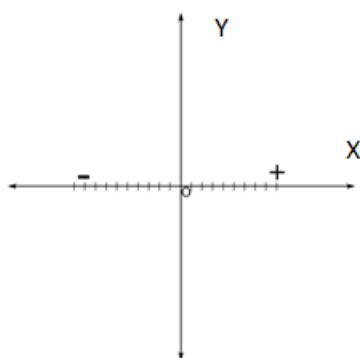
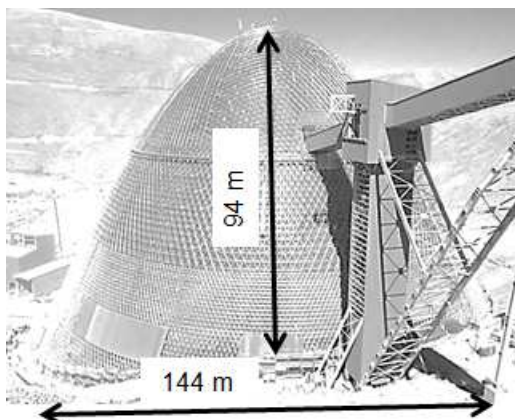
La siguiente estructura es un silo de acopio de material y tiene la forma de hiperboloide de dos hojas. Para este estudio solo se considera una de las hojas de la superficie. Se conoce que mide 94 m de altura y que el diámetro en la base es de 144 m.

La ecuación del hiperboloide es:

$$-\frac{x^2}{1,5^2} - \frac{y^2}{1,5^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

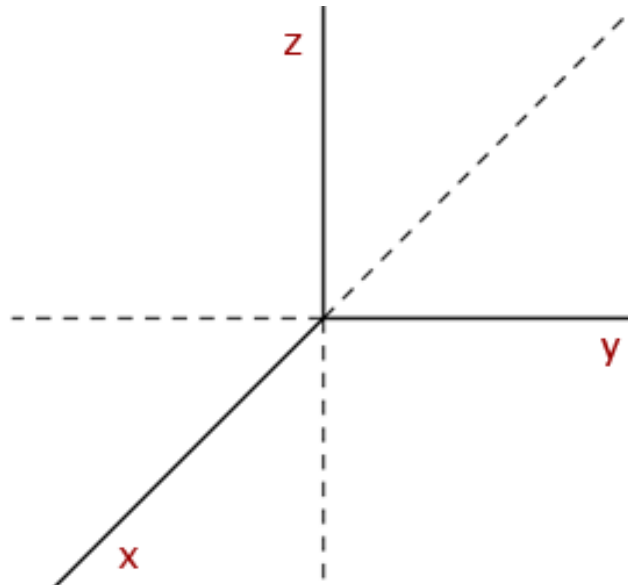
Se pide:

- a) Graficar las trazas de la superficie con los planos coordenados, utilizando los siguientes gráficos de SCC en el plano:





- b) Construir la gráfica en el espacio de la superficie destacando con color la hoja o copa que define la estructura del silo.



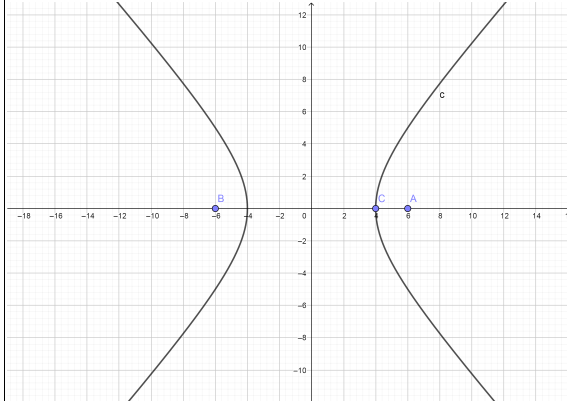
SOLUCIONES

HIPÉRBOLA E HIPERBOLOIDES

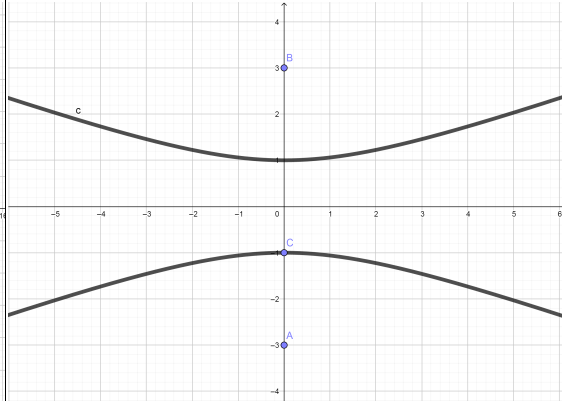
HIPÉRBOLA:

Ejercicio N° 1:

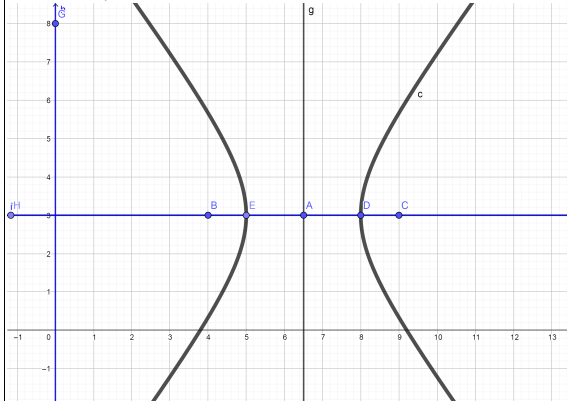
a) $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{20} = 1$



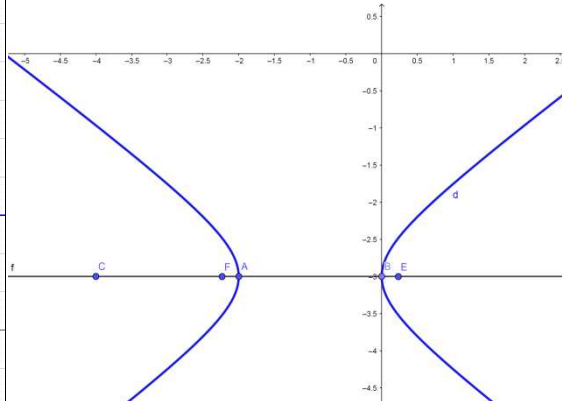
b) $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{8} = 1$



c) $\frac{(x-6,50)^2}{2,25} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$

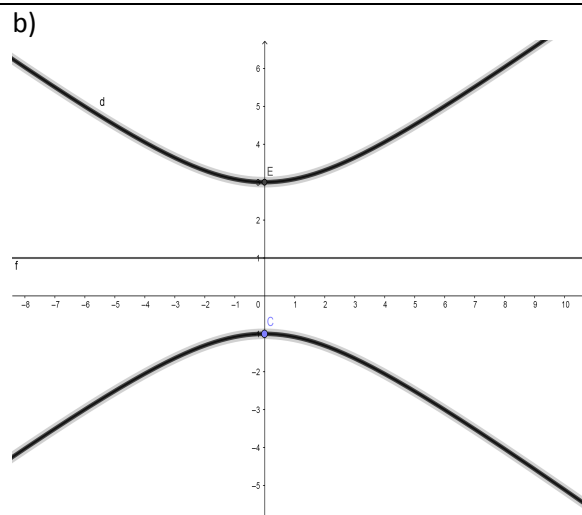


d) $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$



EJERCICIO N° 2:

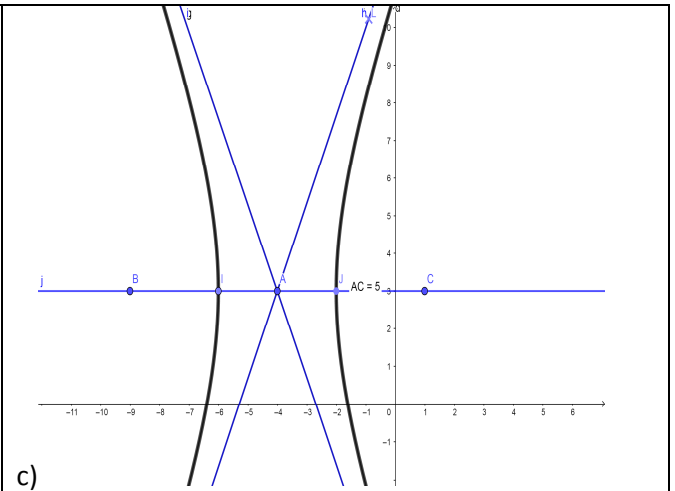
a) $\frac{(y-1)^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$



EJERCICIO N° 3:

a) $\frac{(x+4)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{21,7156} = 1$

b) $e=2,535$



HIPERBOLOIDES:

Ejercicio N°1

Ecuación	Nombre	Traza con XY	Traza con XZ	Traza con YZ	Eje de desarrollo
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a \neq c$	Hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipse	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ hipérbola	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ hipérbola	z
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $a = c$	Hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ circunferencia	$-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ hipérbola	y
$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	Hiperboloide de dos hojas	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ hipérbola		$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ hipérbola	y

* la superficie no interseca con el plano XZ. Las intersecciones con planos paralelos a XZ son elipses

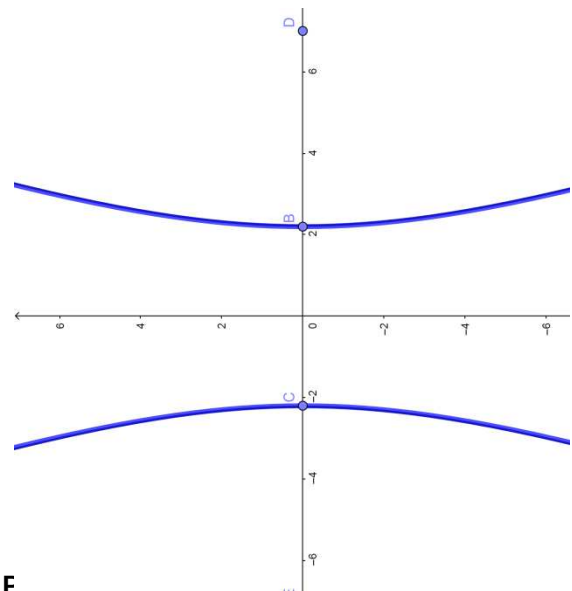
Ejercicio N°2

a)

$$\frac{x^2}{2,2^2} - \frac{y^2}{6,65^2} + \frac{z^2}{2,2^2} = 1$$

b) Plano YZ: hipérbola

$$-\frac{y^2}{6,65^2} + \frac{z^2}{2,2^2} = 1$$



EJERCICIO N°3:

a-Superficie alabeada, si se la considera de la familia de las regladas. Según la familia de superficies curvas es una Cuádrica con centro. Nombre: Hiperboloide de una hoja. Superficie simétrica con respecto a todos los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen del SCC en el espacio. La ecuación posee dos coeficientes positivos y uno negativo cuya variable indica el eje de desarrollo del hiperboloide (para este caso el desarrollo es en eje z). Las trazas son hipérbolas y elipses o circunferencias (eso lo define como hiperboloide de una hoja de REVOLUCIÓN o de NO REVOLUCIÓN). Para este caso, en el plano XY la traza menor se denomina CÓNICA DE GARGANTA (puede ser elipse o circunferencia).

b-Cuádrica con centro. Hiperboloide de dos hojas.

Superficie simétrica con respecto a todos los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen del SCC en el espacio. La ecuación posee dos coeficientes negativos y uno positivo cuya variable indica el eje de desarrollo del hiperboloide (para este caso el desarrollo es en eje y). Las trazas son hipérbolas y elipses o circunferencias (eso lo define como hiperboloide de dos hojas de REVOLUCIÓN o de NO REVOLUCIÓN).

c-Idem b. Cuádrica con centro. Hiperboloide de dos hojas.

Superficie simétrica con respecto a todos los planos coordenados, a los ejes coordenados y al origen del SCC en el espacio. La ecuación posee dos coeficientes negativos y uno positivo cuya variable indica el eje de desarrollo del hiperboloide (para este caso el desarrollo es en eje z). Las trazas son hipérbolas y elipses o circunferencias (eso lo define como hiperboloide de dos hojas de REVOLUCIÓN o de NO REVOLUCIÓN).

d-Idem b.

e-Idem a. Superficie alabeada. Cuádrica con centro. Hiperboloide de una hoja.

La ecuación posee dos coeficientes positivos y uno negativo cuya variable indica el eje de desarrollo del hiperboloide (para este caso el desarrollo es en eje y).

f-Idem e.

EJERCICIO N°4:

SUPERFICIE SELECCIONADA	DATOS	ECUACION DE LA SUPERFICIE	TRAZAS DE LA SUPERFICIE
Superficie a	La traza en el plano XY es una circunferencia	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Superficie b	Las intersecciones de la superficie con planos paralelos a XZ , son elipses	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Superficie c	Para planos paralelos a los planos YZ y XZ las intersecciones son hipérbolas. Las trazas en YZ y XZ son hipérbolas,	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $-\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



Superficie e	La traza en el plano XZ es una elipse.	$+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $-\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

EJERCICIO N°5:

a-Los hiperboloides son siempre superficies de NO REVOLUCION	V	F
b-El hiperboloide de dos hojas posee en su ecuación canónica dos coeficientes positivos.	V	F
c-Un hiperboloide de una hoja centrado en el origen del sistema es una superficie simétrica con respecto a todos los planos coordenados.	V	F
d-Las trazas de un hiperboloide de una hoja con los planos coordenados siempre son dos hipérbolas y una circunferencia.	V	F
e- El término con signo positivo en la ecuación del hiperboloide de dos hojas, indica el sentido de desarrollo de dicha superficie.	V	F

EJERCICIO N°6:

a) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{3} = 1$

b) realizar gráfica

EJERCICIO N°7:

a) Hiperboloide de dos hojas, con eje de desarrollo en Y.

b) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ Hipérbola $\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{9} = 1$ Hipérbola $-\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ No hay

traza, hay intersecciones generadas por planos paralelos a XZ, que son elipses

c) realizar gráfica

EJERCICIO N°8:

a) $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{10^2} - \frac{z^2}{43,42^2} = 1$

b) realizar gráfica

EJERCICIO N°9:

a) Superficie= 452,389 m²

b) Altura= 300 m

EJERCICIO N°10:

a) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{5^2} - \frac{z^2}{9,819^2} = 1$

b) Superficie= 207,35 m²

EJERCICIO N°11:

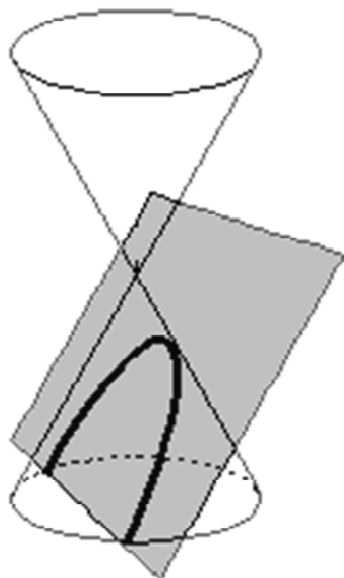
Rta: 226,19 m²

EJERCICIO N°12:

Ejercicio de desarrollo gráfico.

PARÁBOLA - PARABOLOIDES DEL PLANO (2D) AL ESPACIO (3D)

Por
CLARISA LANZILLOTTO

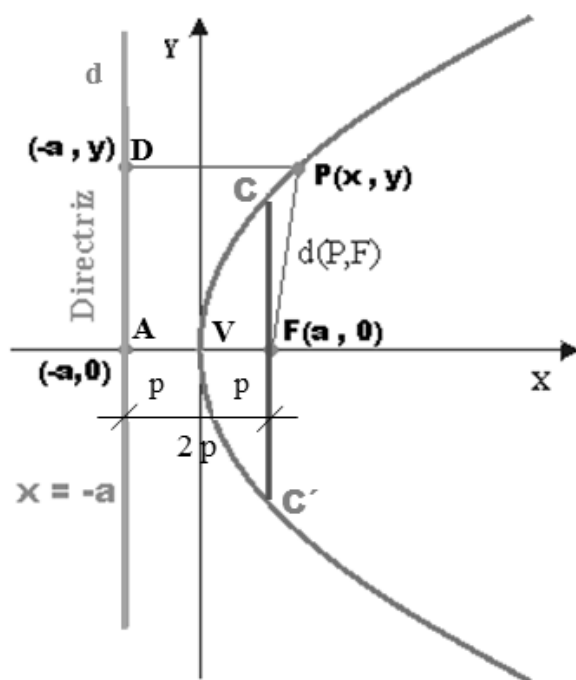


LA PARÁBOLA junto con la Hipérbola es una cónica ABIERTA, la curva se extiende indefinidamente y como anticipamos en capítulo anterior, se obtiene al seccionar una superficie cónica circular recta, con un plano secante paralelo a una generatriz del cono.

Podemos abordar el estudio de la parábola desde dos aspectos: Desde el **análisis matemático** como una función polinómica; y desde la **Geometría Analítica** definiéndola como:

Parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que **equidistan** de una recta dada, llamada directriz, y un punto fijo fuera de la recta que se denomina foco.

$$d(PF) = d(PD)$$



Tras la definición, vamos a identificar la gráfica y sus elementos:

F: Foco.

D: Directriz.

Eje Focal : Es la recta perpendicular a la Directriz trazada por F y es el eje de Simetría de la Parábola.

V : Se llama Vértice y es el punto de intersección de la Parábola con el Eje focal

CC': Cuerda focal o Lado recto

p: Es un vector. Tiene dirección, (horizontal o vertical), sentido (de V a F) y módulo (= Distancia VF). Teniendo en cuenta

el sentido, hacia la derecha y hacia arriba es positivo (+); hacia la izquierda y abajo es negativo(-).

El módulo de (**p**) es también la distancia del vértice al pie de la perpendicular A, que intersecta el eje de la parábola con la directriz.

Así la distancia desde A hasta F es igual a 2p.

Si trasladamos esta medida (**2p**) desde el Foco, en forma perpendicular al eje focal ubicaremos el punto C y luego por simetría C'.

Así, el segmento CC' es el Lado recto de la parábola y es = 4p

Podemos advertir también que $AV = VF$ por lo tanto se demuestra que el Vértice V pertenece a la parábola por cumplir con la definición.
Esto afirma que la excentricidad de la parábola es $e=1$

UNICIDAD: todas las parábolas son semejantes, es decir, tienen la misma forma, salvo su escala.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA:

En todos los casos, el vector " p " con su signo nos permite posicionar el foco, el sentido de las ramas, y por lo tanto ubicar la recta directriz. En las gráficas, la flecha indica valores positivos de " p " y valores negativos de " p "

Si referimos la parábola a un sistema de ejes cartesianos ortogonales se pueden producir dos situaciones a saber:

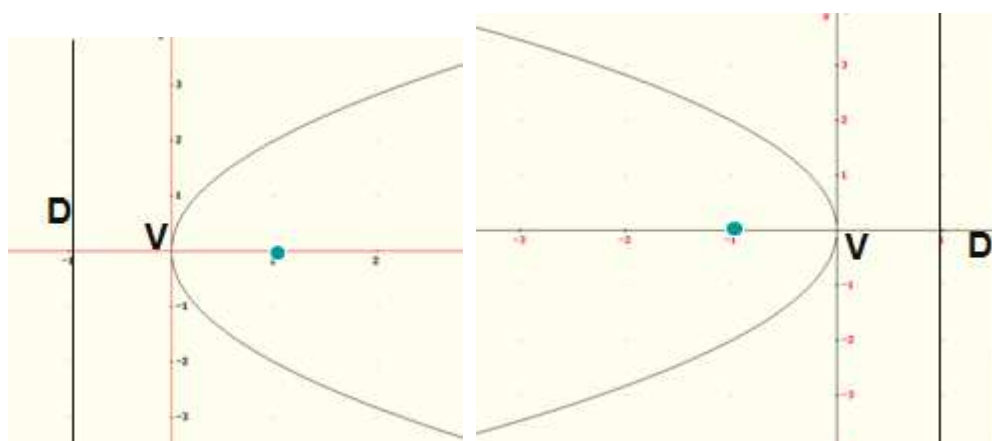
ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA A EJE HORIZONTAL: el eje focal coincide, o es paralelo al eje de abscisas.

ECUACIÓN CANÓNICA: Parábola con vértice en el origen del sistema de coordenadas cartesianas $V(0;0)$. Distancia del vértice al foco = p

La ecuación es: $y^2 = 4px$

$+p \Rightarrow$ ramas a la derecha

$-p \Rightarrow$ ramas a la izquierda

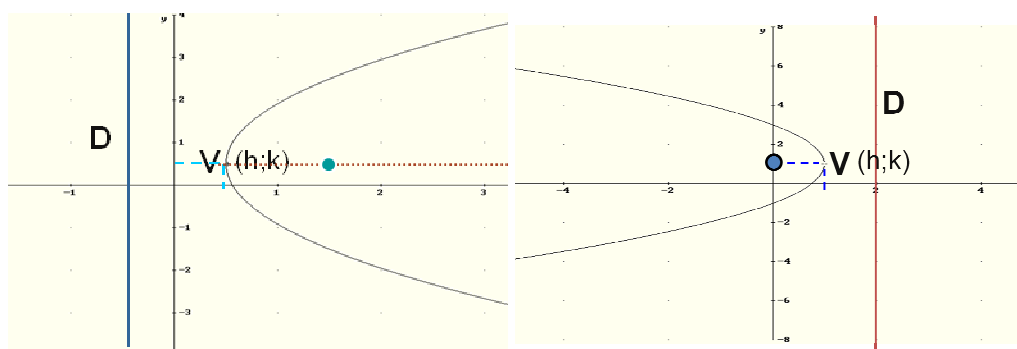


ECUACIÓN ORDINARIA: Parábola con vértice desplazado del origen del sistema coordenado $V(h;k)$. Distancia del vértice al foco = p

La ecuación es: $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

$+p \Rightarrow$ ramas a la derecha

$-p \Rightarrow$ ramas a la izquierda



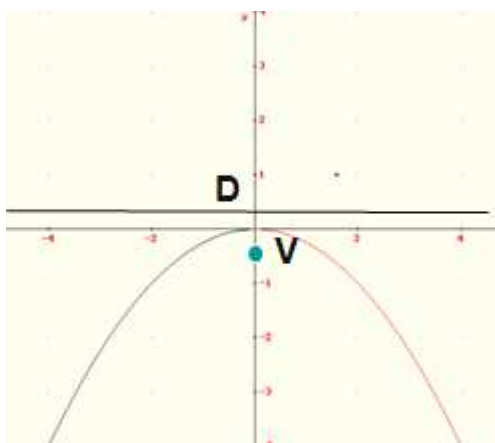
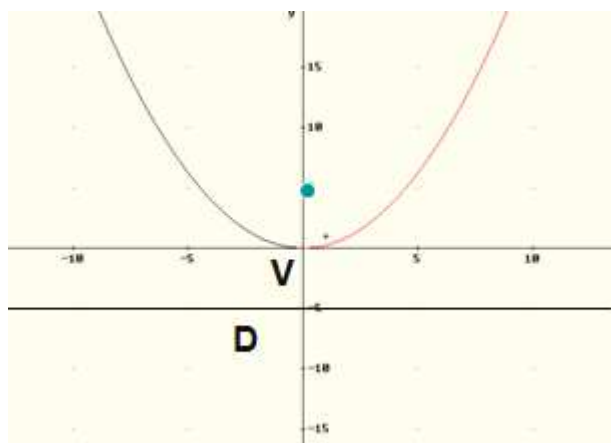
ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA A EJE VERTICAL: el eje focal coincide, o es paralelo al eje de ordenadas.

ECUACIÓN CANÓNICA: Parábola con vértice en el origen del sistema de coordenadas cartesianas $V(0;0)$. Distancia del vértice al foco = p

La ecuación es: $x^2 = 4 p y$

$+p \Rightarrow$ ramas hacia arriba

$-p \Rightarrow$ ramas hacia abajo

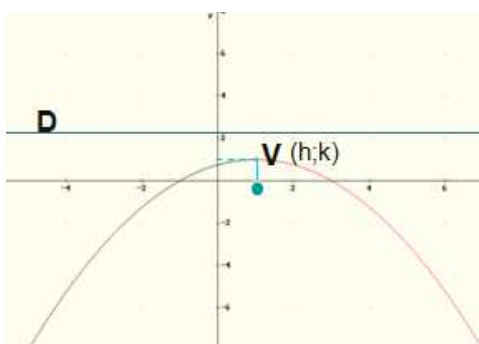
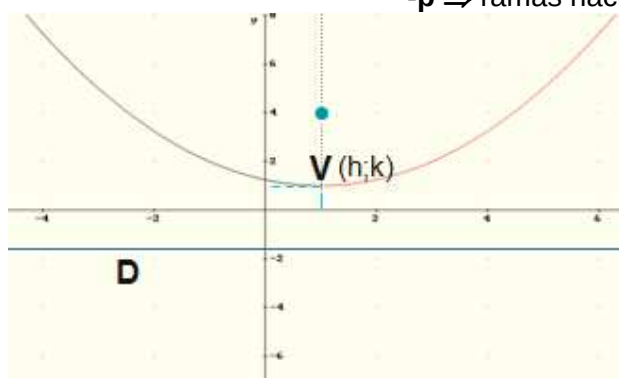


ECUACIÓN ORDINARIA: Parábola con vértice desplazado del origen del sistema coordenado $V(h;k)$. Distancia del vértice al foco = p

La ecuación es: $(x-h)^2 = 4 p (y-k)$

$+p \Rightarrow$ ramas hacia arriba

$-p \Rightarrow$ ramas hacia abajo



LA PARÁBOLA- FUNCIÓN POLINÓMICA DE 2º GRADO:

Desde el punto de vista del Análisis Matemático, estudiaremos a la parábola siempre orientada según el eje y , bajo el concepto de **Función**.

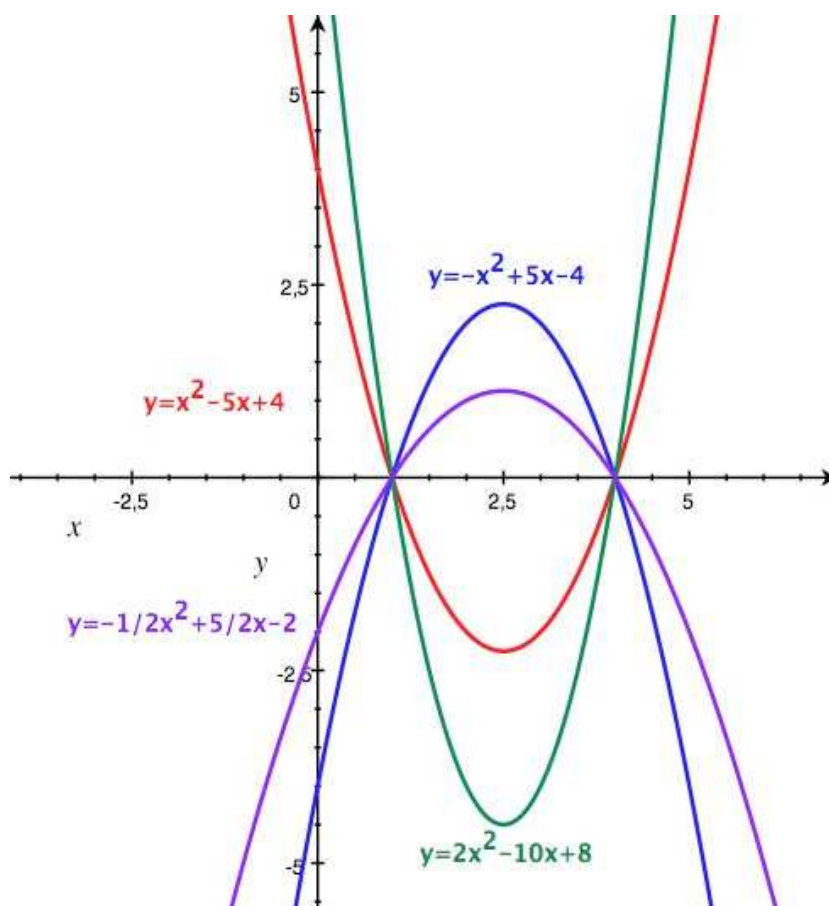
Si desarrollamos algebraicamente la ecuación de la parábola a eje vertical

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$



Obtenemos LA FUNCION POLINÓMICA PARABOLICA y CUADRATICA

$$y = ax^2 + bx + c$$



En el gráfico observamos parábolas situadas en el plano cartesiano y sus ecuaciones. Estudiaremos el significado de cada término de la ecuación y veremos cómo encontrar los elementos fundamentales de la cónica

$$y = ax^2 + bx + c$$

a=coeficiente principal del término cuadrático. Indica el sentido de las ramas

b=Coeficiente del término en x. Indica desplazamiento de la parábola (en horizontal, según el eje de las abscisas) respecto al origen del sistema coordenado.

c= término independiente. Es la ordenada al origen. Indica el punto donde

la curva interseca al eje y.

Del desarrollo algebraico de las ecuaciones se desprenden las fórmulas que a continuación se detallan y que permiten vincular ambas ramas de la matemática teniendo un conocimiento completo del comportamiento de esta curva.

$$a = 1/4p$$

$$P = 1/4a$$

$$b = -2h/4p$$

$$h = -b/2a$$

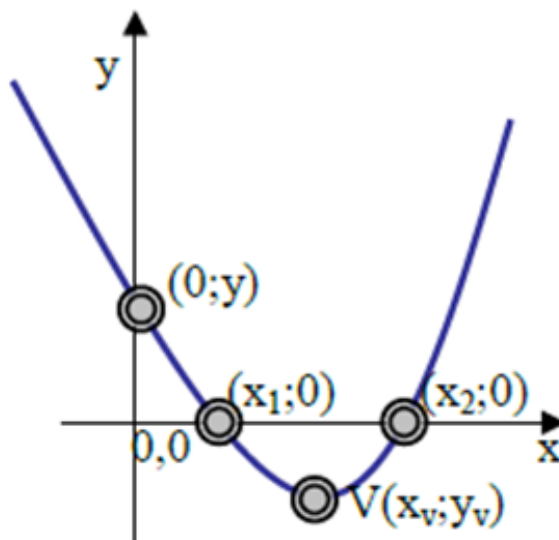
$$c = h^2/4p + k$$

$$k = -b^2/4a + c$$

De ellas la que utilizaremos con mayor frecuencia será la que permite conocer el vector **p**, conociendo **a** y a la inversa.

Para resolver la parábola y representarla gráficamente, debemos, a partir de la función, encontrar sus elementos fundamentales que son: **El vértice**, dando sus

coordenadas cartesianas $V(x_v, y_v)$, las **raíces** que llamaremos x_1 y x_2 (intersecciones de la curva con el eje x), el punto $C(0;y)$, ordenada al origen, punto donde la parábola corta al eje y , el **Foco** (su posición en coordenadas cartesianas).



EL VÉRTICE: Para calcular sus coordenadas puede usarse la expresión:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_v = +c - \frac{b^2}{4a}$$

LAS RAÍCES: Son los puntos donde la Parábola corta el eje de abscisas, es decir, son los puntos donde la coordenada y es igual a 0 . Para obtener las dos raíces de la parábola reemplazamos $y=0$ en la ecuación

$$\text{Si } y = 0$$

$$0 = ax^2 + bx + c$$

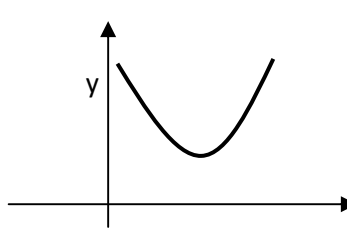
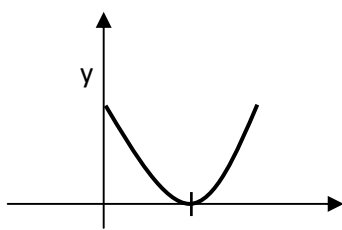
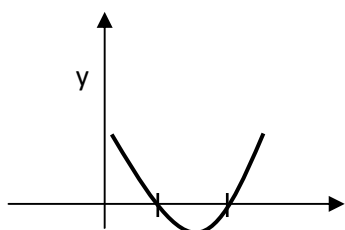
la función se convierte en ecuación de segundo grado y al resolverla **tendrá dos raíces**; $(x_1; 0)$ y $(x_2; 0)$.

Para encontrar esos puntos utilizaremos la fórmula resolvente:

$$x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$$

$$x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$$

El resultado de estas operaciones puede arribar a que la parábola tenga: **dos raíces reales distintas, que ambas raíces resulten el mismo número**, o que se obtengan **dos raíces imaginarias** o complejas. En este caso la parábola no toca el eje de abscisas.



Propiedades de las raíces:

Si se conocen las raíces de una parábola y el coeficiente principal **a** de la ecuación, se puede construir la misma aplicando las propiedades de las raíces.

Dado **a**, para obtener el valor de **b** se aplica esta expresión:

$$-(x_1 + x_2) = b/a$$

Y para obtener el valor de **c**:

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

Por ejemplo, si las raíces de una parábola son:

$$x_1 = -3 \text{ y } x_2 = 2 \text{ para } a = 1$$

Calculamos **b** y **c**

$$-(-3+2) = 1=b$$

$$(-3 \times 2) = -6=c$$

La ecuación será:

$$y = x^2 + x - 6$$

El vértice será:

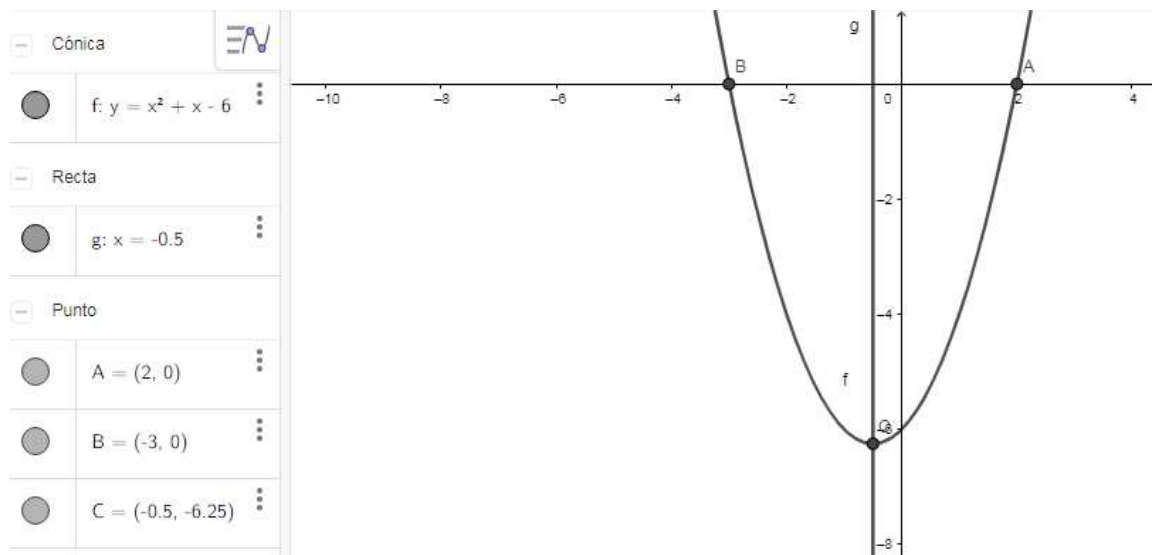
$$V(-1/2 ; -6,25)$$

$$x_v = \frac{-1}{2 \times 1} = \frac{-3 + 2}{2} = -1/2$$

$$y_v = -6 - \frac{1^2}{4 \times 1} = -6,25$$

Ordenada al origen = **c** (0;-6)

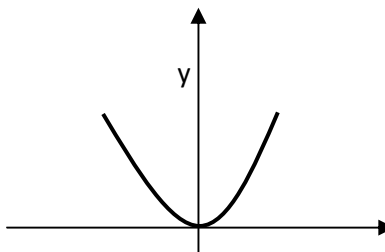
Por último, graficamos la parábola a escala adecuada



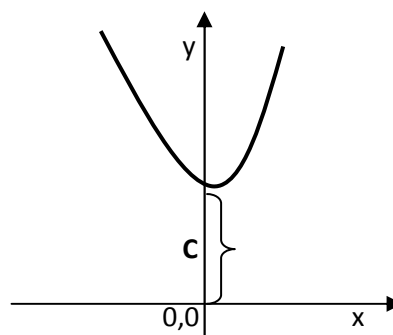
Formas incompletas de la ecuación de la parábola:

Pueden presentarse las siguientes:

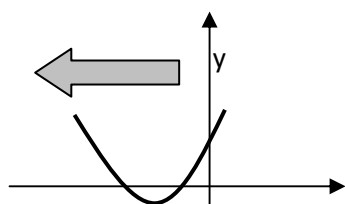
$y = ax^2$ El eje de ordenadas es el eje de simetría y el vértice coincide con el origen del sistema. Por lo tanto para poder graficar a esta curva será necesario valuar los distintos puntos de **x** para hallar los valores de **y**. Recordamos que si **a** es negativo, las ramas de la parábola van hacia abajo.



Si falta el término en **x** (**bx**) por ejemplo **$y = ax^2 + c$** el eje de simetría de la parábola es el eje de ordenadas y el vértice dista del origen del sistema, un valor igual a **c**. Por lo tanto el término **c** indica en qué punto corta la parábola al eje de ordenadas.



Por último recordemos que la presencia del término lineal (**bx**) en la ecuación de la parábola indica un desplazamiento de la misma del origen del sistema cartesiano. En este sentido podemos observar que si los signos de los términos afectados por la **variable "x"** son iguales por ejemplo

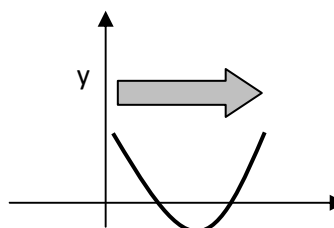


$$y = +ax^2 + bx + c$$

la parábola se desplaza hacia la **izquierda del eje de ordenadas**.

Si los signos de los términos afectados por la **variable "x"** son distintos por ejemplo

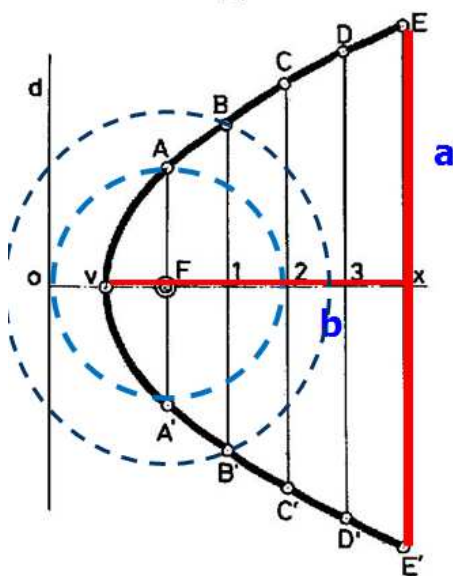
$$y = +ax^2 - bx + c$$



la parábola se desplaza hacia la **derecha del eje de ordenadas**.

SECTOR PARABÓLICO:

Para calcular el área que encierra la parábola o sector parabólico, se aplica la expresión:



Sector = $\frac{2}{3} a b$

a= ancho del sector (base)

b= altura (de la base al vértice)

No confundir con los coeficientes de la ecuación.

También este gráfico muestra **cómo construir la parábola por puntos**.

Para aplicar este método se conocen: posición en el plano de la directriz **d**, el eje de simetría y la posición del **foco**. El vértice **V** es el punto medio del segmento OF. Se trazan varias perpendiculares al eje de simetría, desde el vértice a la derecha. Con

centro en F y radio FO, se corta a dicha perpendicular, obteniendo el punto A y su simétrico A', que son puntos de la curva. Esta operación se repite para obtener nuevos puntos que al unirlos delinear la PARABOLA.

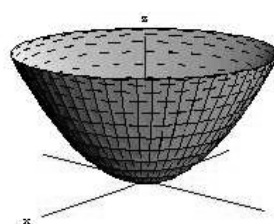
PARA AMPLIAR MÁS AÚN LA TEORÍA SOBRE PARÁBOLA. MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN. ETC. RECURRE AL MATERIAL DISPONIBLE EN EL AULA VIRTUAL DE LA CÁTEDRA.

LOS PARABOLOIDES:

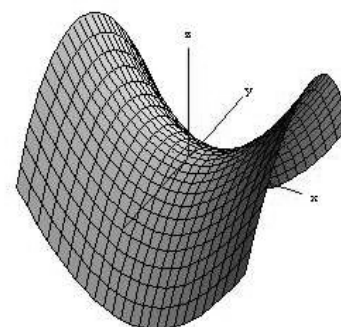
Los paraboloides también pertenecen a la familia de Superficies No regladas o Curvas. En el caso del paraboloides hiperbólico, también puede considerarse una Superficie reglada alabeada.

Pertenecen al grupo de las **Cuádricas Sin Centro**, representadas por la ecuación:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = kz$$



Paraboloides elíptico



Paraboloides hiperbólico

Las superficies Cuádricas **sin centro** tienen dos planos de simetría llamados **planos principales**. Un eje de simetría llamado **eje principal**, pero ningún centro de simetría. Son dos: EL PARABOLOIDE ELÍPTICO Y EL PARABOLOIDE HIPERBÓLICO.

Paraboloide elíptico:

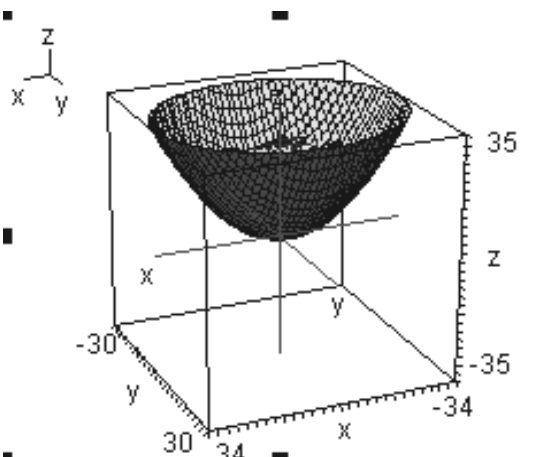
Llamamos **paraboloide elíptico** a la superficie que en un sistema de coordenadas cartesianas se determina por las formas de la ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = kx \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = ky \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = kz$$

a, b y c son semiejes.

El coeficiente **k**, si es negativo, las ramas de la superficie son hacia abajo, si es positivo, las ramas son hacia arriba. A medida que aumenta el valor de **k**, el paraboloide es más abierto. Si el valor de **k** es pequeño, el paraboloide es más cerrado acercándose a su eje de desarrollo.

En el primer miembro de la ecuación, los coeficientes tienen el mismo signo. El eje de desarrollo de la superficie está presente en el segundo miembro de la ecuación. Así tendremos paraboloides elípticos desarrollados a eje **z**, eje **x** o eje **y**. Para nuestro interés tomaremos como ejemplo el paraboloide a eje **z**.



El punto que coincide con el origen de coordenadas se llama **vértice del paraboloide**.

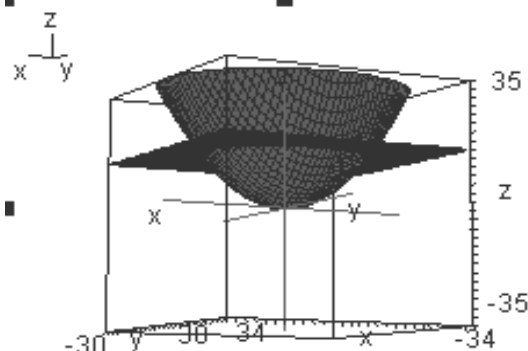
La superficie es simétrica con respecto a los planos XZ e YZ y al eje **z**.

Retomemos la ecuación para comprender sus trazas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = kz$$

INTERSECCIONES POR PLANOS PARALELOS AL PLANO XY:

Son **elipses**

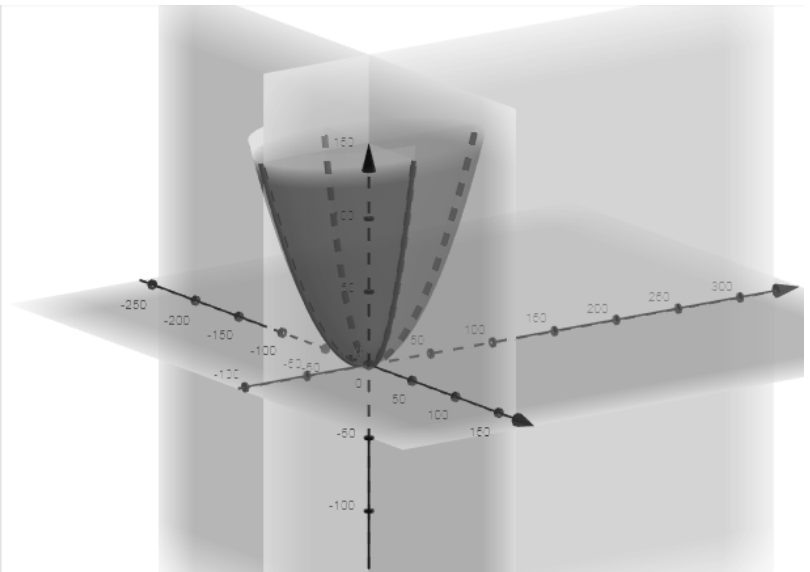
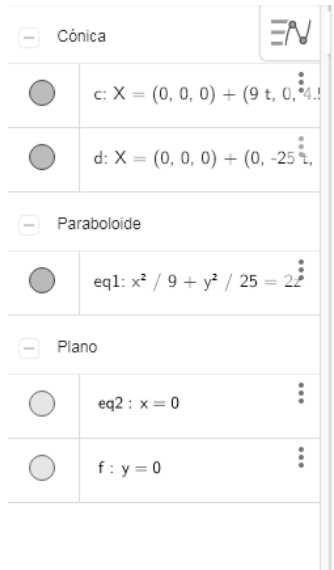


TRAZAS EN LOS PLANOS XZ e YZ:

Son **parábolas perpendiculares**.

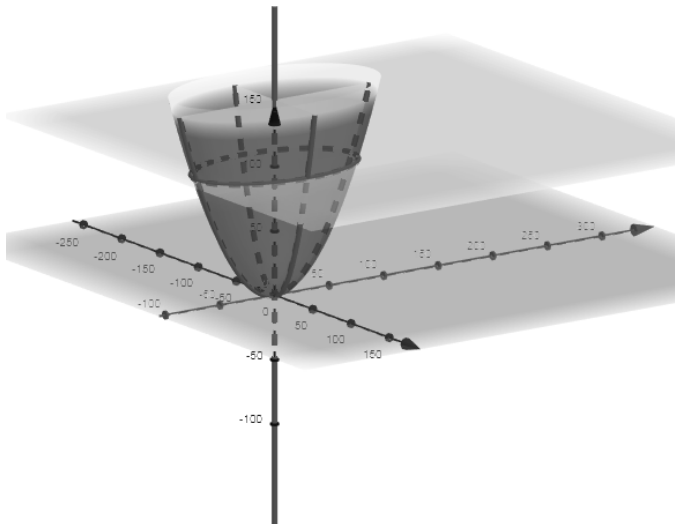
En Geogebra se muestran las trazas del paraboloide elíptico de ecuación:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 2z$$



Parábolas respecto de los planos XZ e YZ. Se muestra **la elipse** que es Intersección del paraboloides con un plano paralelo al plano XY.

En el caso que en la ecuación sea $a = b$, las intersecciones con planos paralelos al plano XY serán **circunferencias** y el paraboloides será un PARABOLOIDE DE REVOLUCIÓN



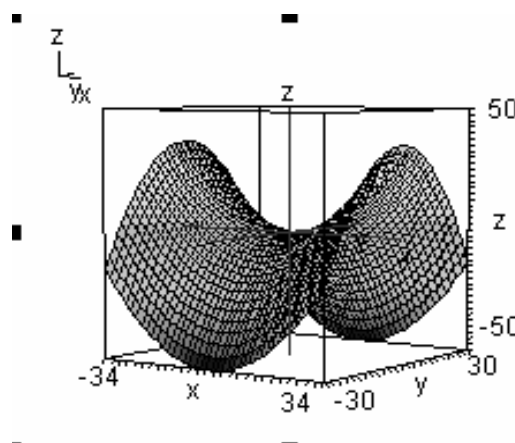
Paraboloides hiperbólicos:

Es una superficie más compleja que las anteriores. Muchos la identifican como la "silla de montar". Esta superficie responde a las formas de ecuación:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = kx$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = ky$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = kz$$



a, b y c son semiejes. La superficie pasa por el origen y no hay otras intersecciones con los ejes coordenados.

En el primer miembro de la ecuación los coeficientes tienen distinto signo. En el segundo miembro está el eje de desarrollo.

También tomaremos como ejemplo el paraboloides hiperbólico desarrollado en eje **z**. (imagen superior).

La superficie es simétrica con respecto a los planos XZ e YZ respectivamente y al eje **z**.

Repetimos que la superficie **pasa por el origen y no hay otras intersecciones con los ejes coordenados**.

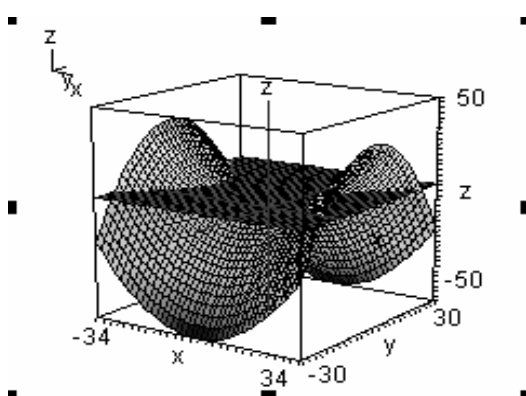
Observemos las **TRAZAS E INTERSECCIONES CON PLANOS PARALELOS A LOS PLANOS COORDENADOS**:

Las secciones de la superficie por planos paralelos pero no coincidentes con el plano XY son **hipérbolas** como se ve en la imagen a la derecha.

Las trazas sobre los planos coordenados XZ e YZ son **parábolas**.

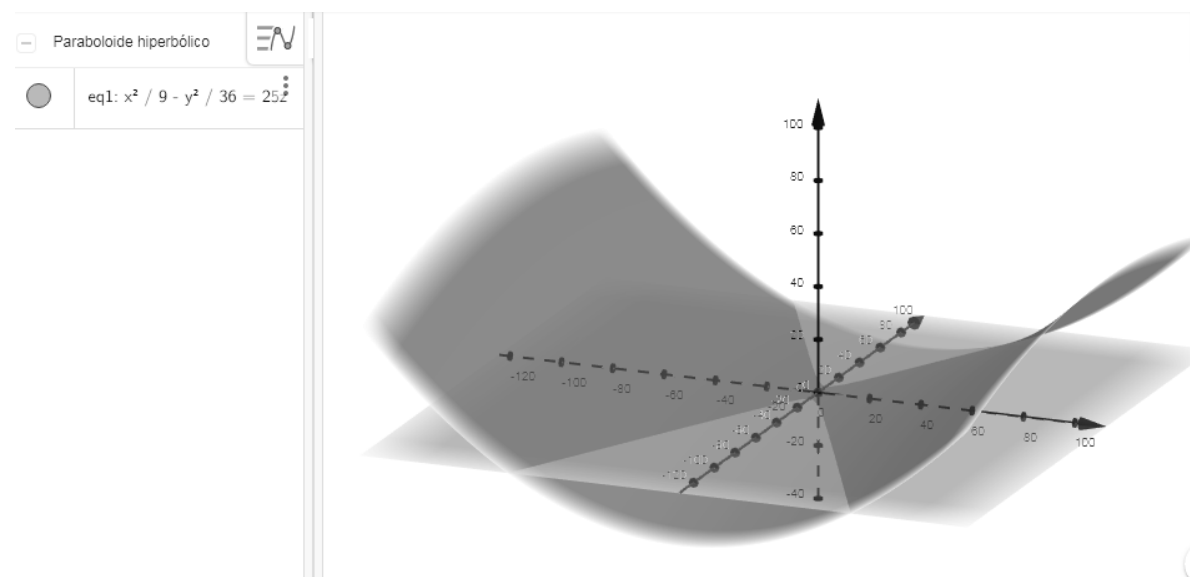
Para ejemplificar aún más la superficie y sus trazas, en Geogebra se grafica un paraboloides hiperbólico de ecuación:

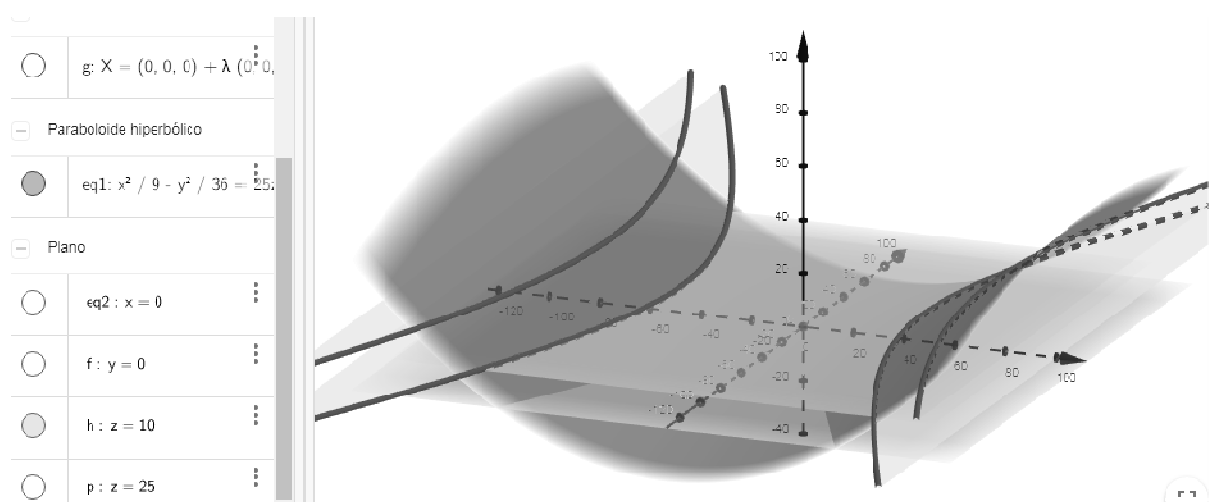
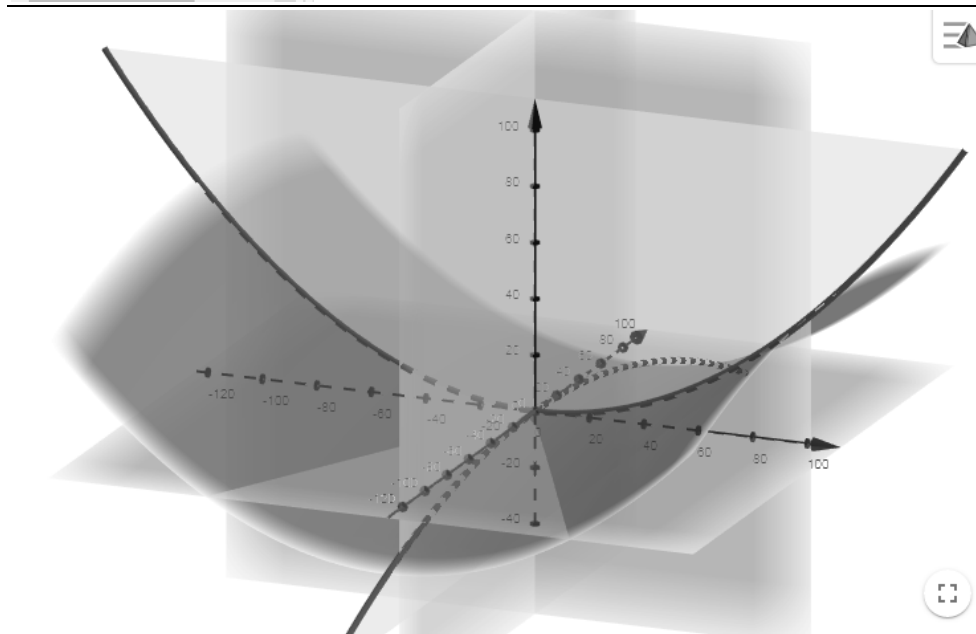
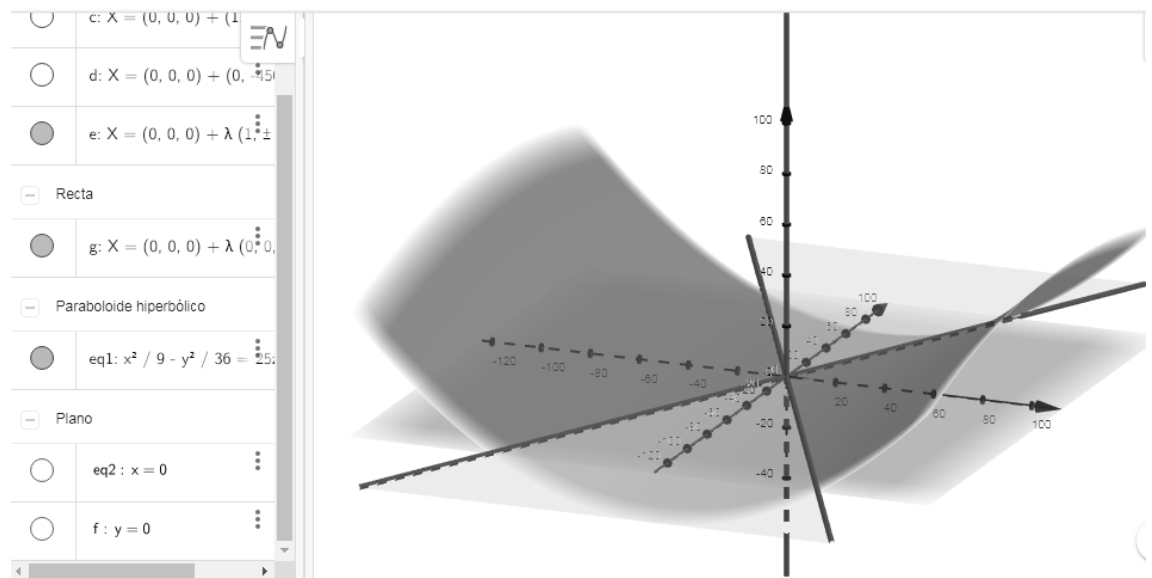
$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{6^2} = 25z$$



Observemos en las dos primeras imágenes que evidentemente el paraboloides hiperbólico **no intersecta a los ejes coordenados** y que la intersección con el plano XY da dos rectas!!!.

Las **TRAZAS** con los planos XZ e YZ son **parábolas** como muestra la tercera imagen debajo. En la cuarta imagen se observa que para planos paralelos al plano XY, las intersecciones son **hipérbolas**. Se ubicaron planos de ecuaciones **$z=10$** y **$z=25$**





Finalizamos aquí el estudio de las secciones cónicas y de las superficies en el espacio.



Nevero de Fuendetodos España- siglo XVIII-Centro para el control de enfermedades BioLab Taiwan



L'Oceanogràfic- Ciudad d las Artes y de las Ciencias

<https://fuendeverde.es/los-neveros-de-fuendetodos-patrimonio-cultural/>

https://tendencias.com/wp-content/uploads/2013/04/natureinspired_biolab-1.jpg

<https://es.wikipedia.org/wiki/Oceanogr%C3%A0fic>

CURIOSIDADES: PARÁBOLA Y CATENARIA- Por SILVIO CHAILE

La **catenaria** es un tipo de curva que se genera por la suspensión de una cuerda o cadena desde sus extremos y sometida a un campo de gravedad uniforme, que a simple vista asemeja a una **Parábola**, razón por la cual, muchos confunden dichas formas geométricas.

El arquitecto Antonio Gaudí (1852-1926), en su constante búsqueda de formas orgánicas en sus obras, y haciendo uso de la geometría y los volúmenes, utiliza la Catenaria como respuesta técnica.

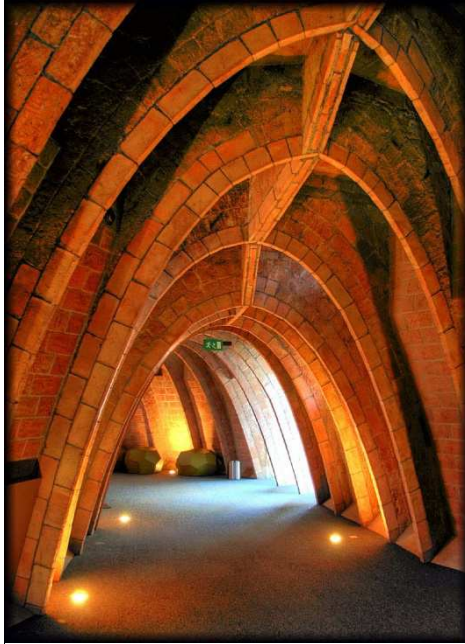


Buhardilla de la casa Batlló (1904-1906)

Casa Batlló: Es una remodelación del edificio, se inspira en formas orgánicas, donde perfecciona y profundiza su análisis de la geometría..

Sagrada Familia (1882- sin finalizar): En el sótano se puede ver la técnica de generación de las catenarias, donde utilizaba cadenas, y luego colocaba un espejo en el piso para poder obtener el reflejo

Casa Milà llamada popularmente La Pedrera: Consta de 6 plantas articuladas alrededor de dos patios interiores uno circular y otro oval, un sótano, un desván (alberga los lavaderos y otras zonas de servicio) y una azotea.



La Pedrera, casa Milà (1906-1910)



Maqueta para la iglesia de la Colina Güell (1898-1914)

APLICACIONES

PARÁBOLA Y PARABOLOIDES

por ALEJANDRO TORRES

PARÁBOLA:

EJERCICIO N° 1:

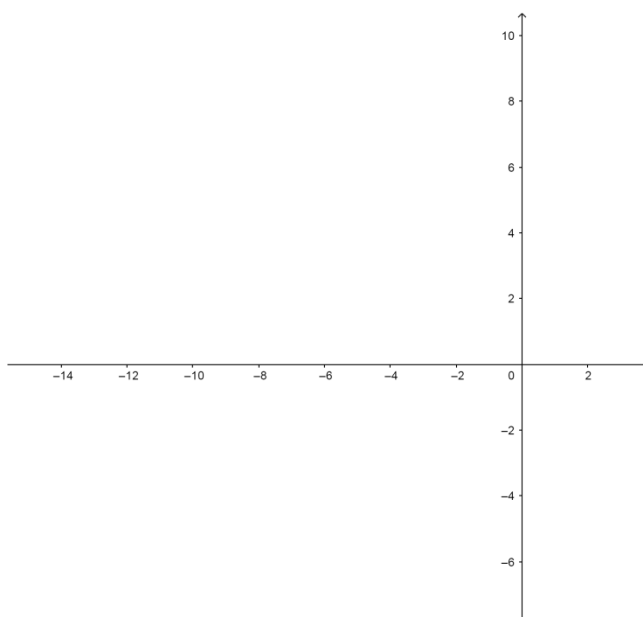
Con los datos que aparecen en la tabla, se pide hallar la **Ecuación de la Parábola** desde la geometría analítica. **Graficar a escala.**

	Vértice	Foco	Ecuación Parábola
a)	$V=(3;5)$	$F=(3;7)$	
b)	$V=(-6; 0)$	$F=(-2,5; 0)$	
c)	$V=(0,5;4)$	$F=(-1,5;4)$	
d)	$V=(1;2)$	$F=(1; 0)$	

EJERCICIO N° 2:

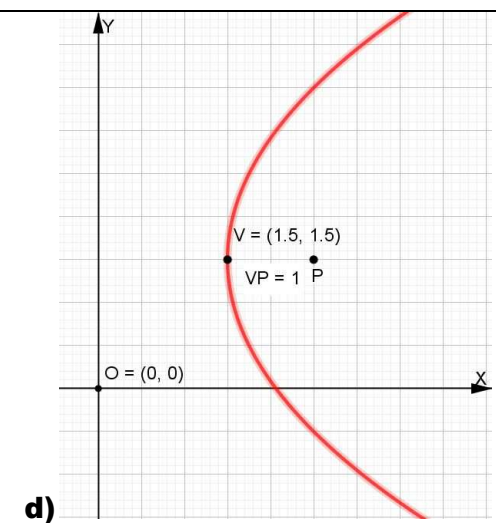
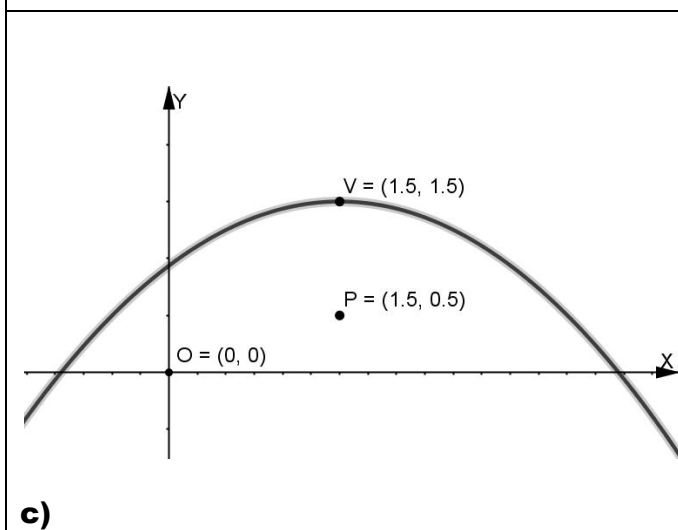
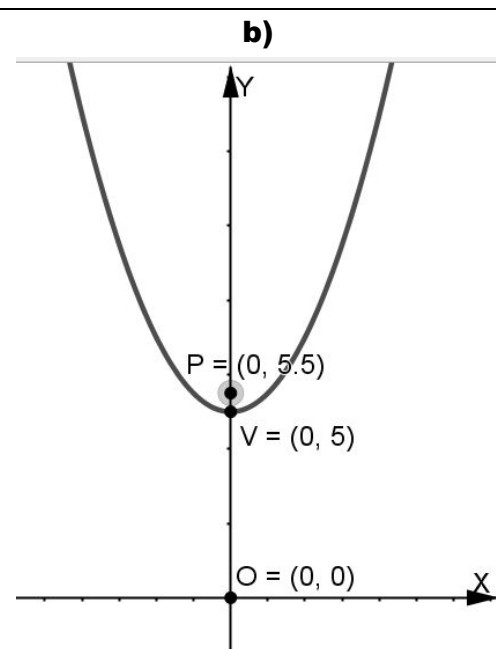
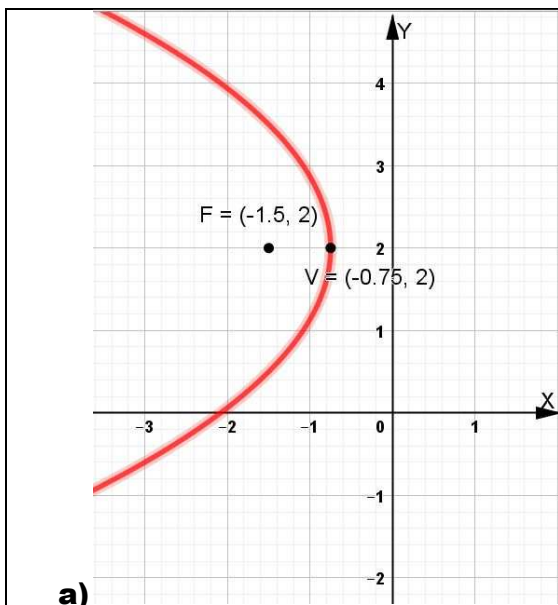
Representar gráficamente la parábola cuya ecuación es $y^2 = 2,4 x$ encontrar:

- las coordenadas cartesianas del vértice y el foco.
- El Módulo, dirección y sentido del vector (p).
- Ecuación de la directriz.
- Longitud del Lado Recto en metros.
- Área del sector encerrado entre el Lado Recto y la curva en m^2 .



EJERCICIO N° 3:

Para cada uno de los siguientes gráficos, se pide hallar la **Ecuación de la Parábola desde el enfoque de la Geometría Analítica.**





EJERCICIO N° 4:

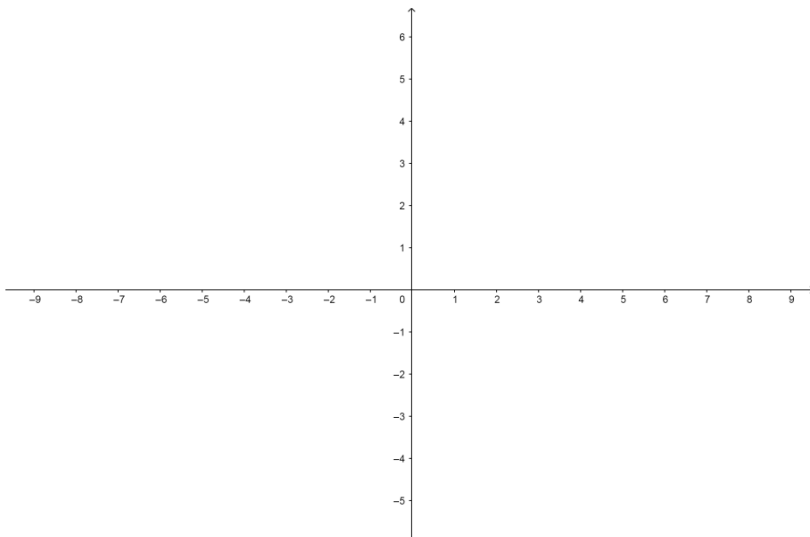
Se sabe que una parábola tiene su vértice en el punto $V(-1; 6,5)$ y es a eje vertical. El punto $D(2; 5)$ también pertenece a la curva. Con estos datos se pide hallar:

- La ecuación de la parábola.
- El Módulo, dirección y sentido del vector (p) .
- Coordenadas cartesianas del foco.
- Ecuación de la directriz.
- Longitud del Lado Recto en metros.
- Coordenadas cartesianas de los puntos de intersección de la parábola con el eje x .
- Representar gráficamente la parábola en un SCC.

EJERCICIO N° 5:

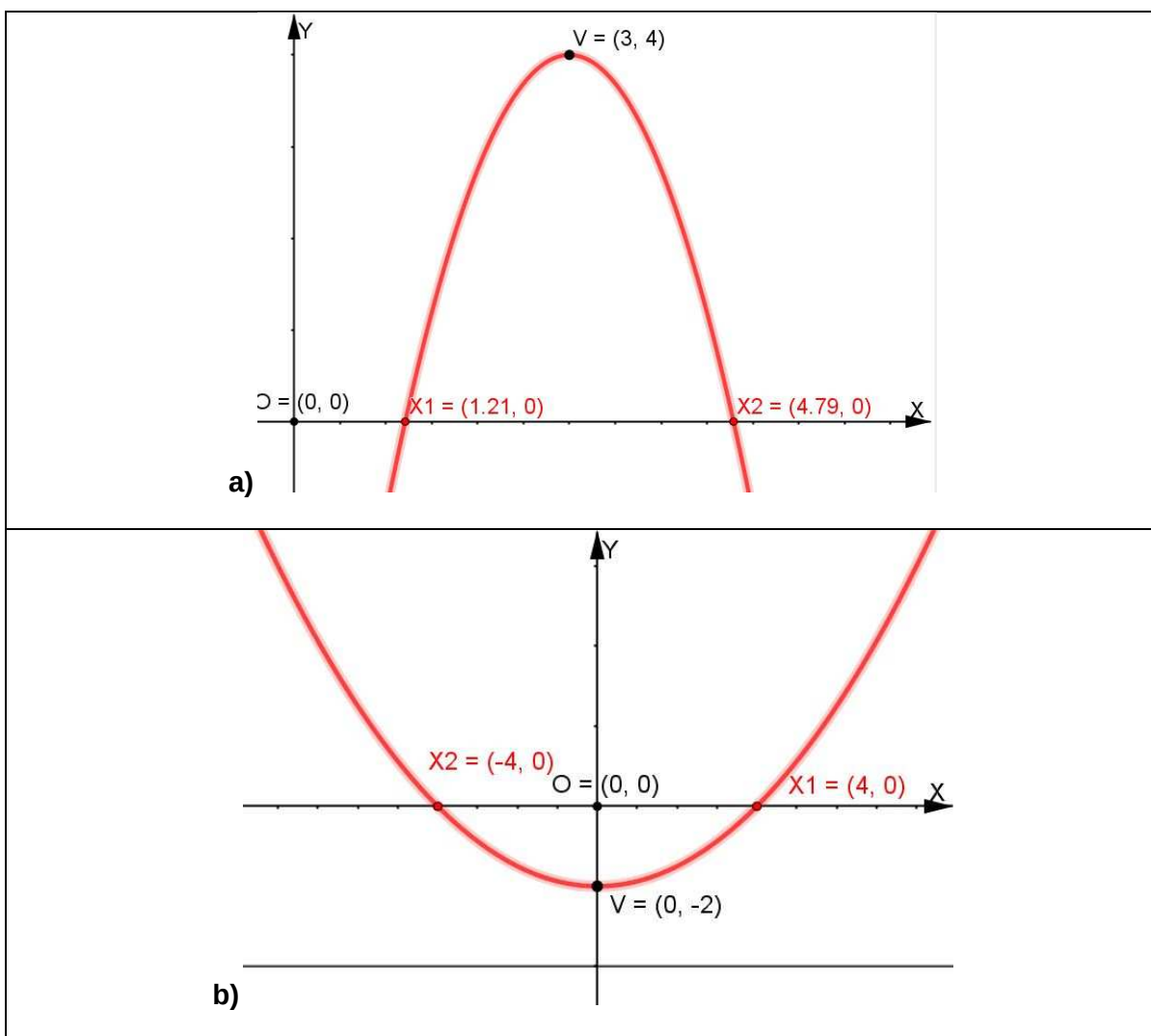
Calcular analíticamente:

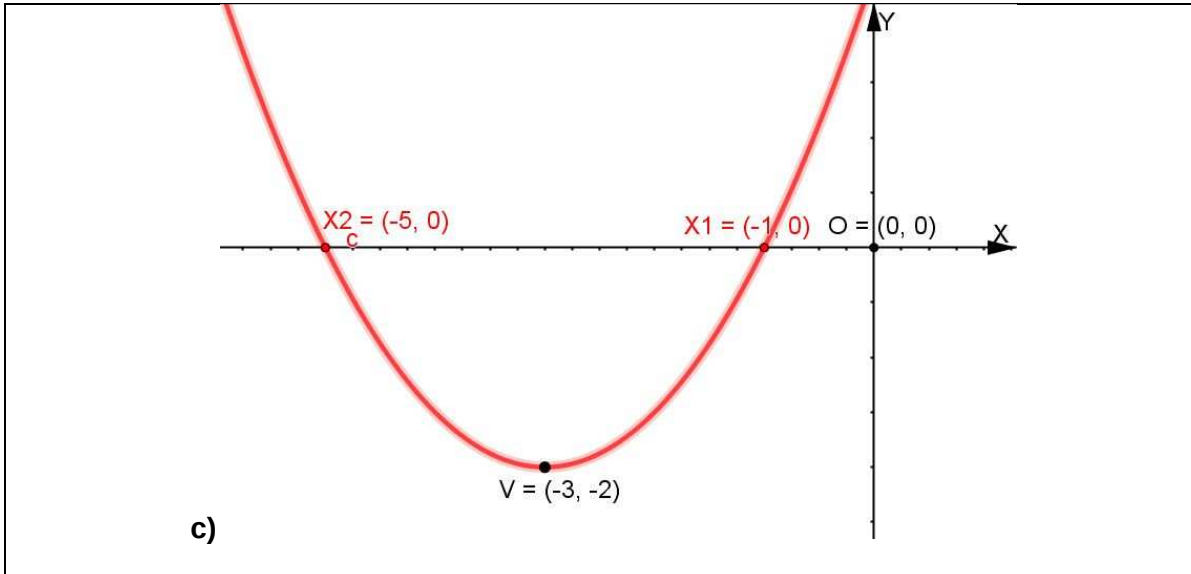
- La ecuación de una parábola cuyo vértice es $V(5; 4)$. La ecuación de la recta directriz es $y = 5$
- Las coordenadas cartesianas de los puntos de intersección con el Lado Recto.
- Coordenadas cartesianas del foco de dicha parábola.
- Coordenadas cartesianas de los puntos de intersección con el eje x .
- Graficar la curva en un SCC.



EJERCICIO N° 6:

Para cada uno de los siguientes gráficos, se pide hallar la **Ecuación de la Parábola**, desde el enfoque de la geometría analítica.





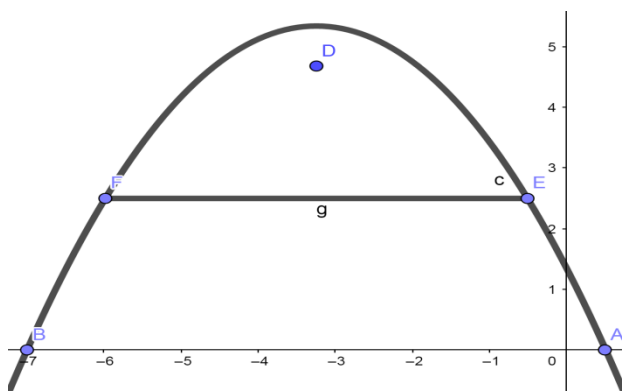
EJERCICIO N° 7

Uno de los primeros edificios que construyó A. Gaudí, en Mataró a las afueras de Barcelona, fue esta Cooperativa Obrera Textil. El edificio se basa en una estructura con forma arco parabólico.

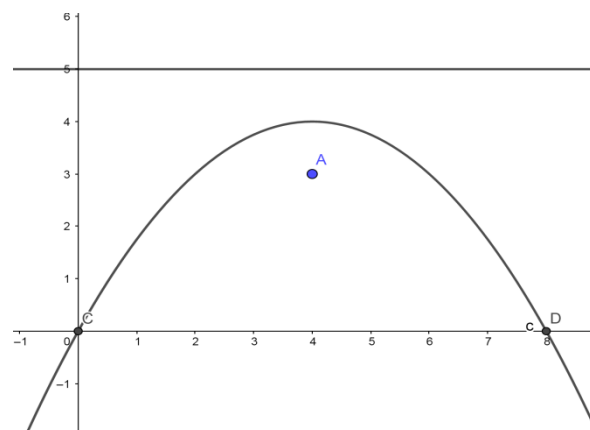


https://lh4.googleusercontent.com/-SaCyRpPcpzw/VLYkpSm-WFI/AAAAAADPDE/OS-i8jsx0FM/w521-h391-no/01AntoniGaud%C3%ADCornet-Nave%2BGaud%C3%AD_1600x1200.JPG

Sabiendo que el arco se asimila a una parábola de ecuación $y = -0,38x^2 - 2,46x + 1,35$, se pide calcular el área vidriada del sector parabólico que se encuentra por encima de los 2,5 m de altura (en m^2).



EJERCICIO N° 8 :



Encontrar **la ecuación de la parábola**, **el área** en m^2 (sector parabólico) y **el volumen** en m^3 de este galpón parabólico sabiendo que corta al eje de las abscisas en B (8 ;0) y C (0 ; 0) y la ecuación de la directriz es $y = 5$
Largo del galpón = 15 m.

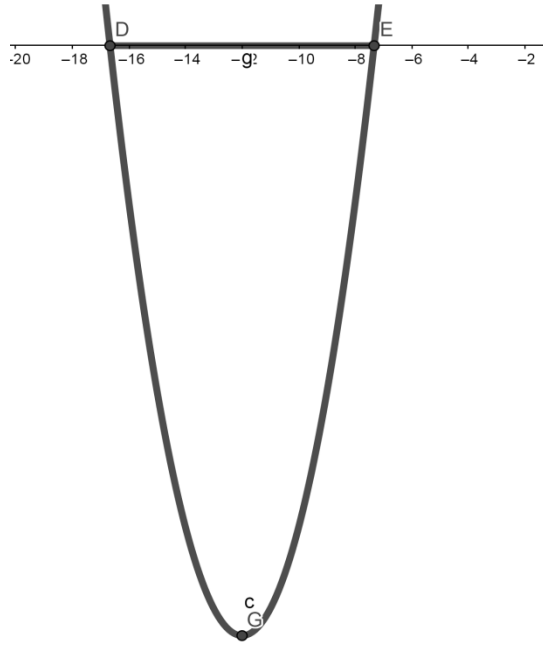
https://lh3.googleusercontent.com/ZsFEMfy0pLVDNF2CIIwN_x1sVqU21MBMplrbh_nXzvwXEdj1mreXjpgrNlBtL4VENc3i2mE=s147



EJERCICIO N° 9:

El siguiente gráfico representa la vista en planta de una fuente, cuya forma corresponde a una parábola. El sector parabólico está formado por la curva y el eje de abscisas. Encontrar **el volumen** en m^3 de la fuente sabiendo que:

- las raíces de la parábola son:
D $(-16,66; 0)$ y E $(-7,34; 0)$
- el coeficiente principal de la ecuación es $a = 1$
- la profundidad es de 1,30 m.



EJERCICIO INTEGRADOR

PARÁBOLA

Por **SILVIO CHAILE**

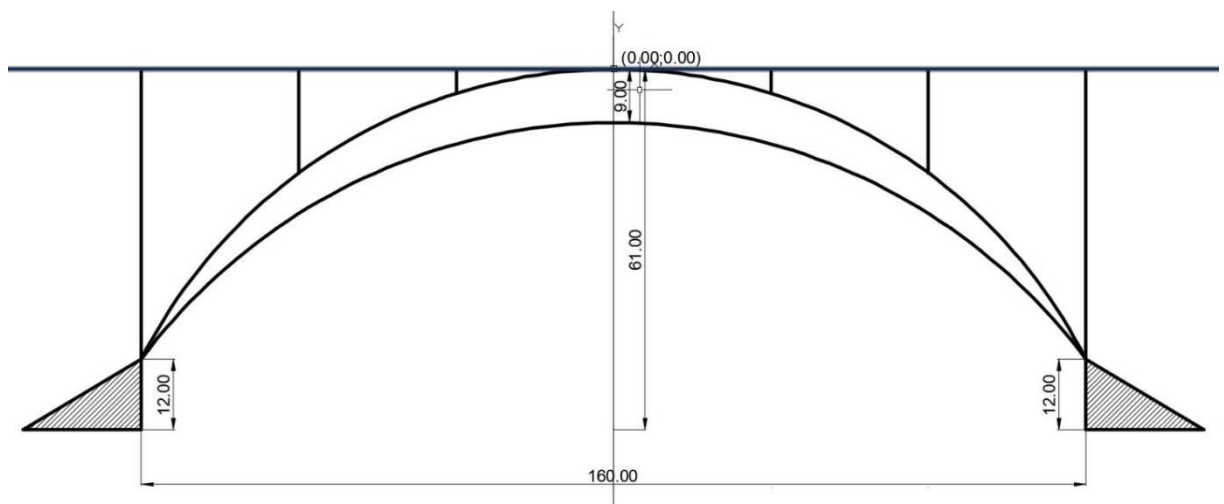
PUENTE MARÍA PÍA (1876-1877)

Construido en Oporto, Portugal, para cruzar el río Duero, fue el primer puente en arco ferroviario que unió las dos riveras del río, diseñado por Théophile Seyrig (1843-1923, ing. alemán), socio de Gustave Eiffel (1832-1923, ing. Civil francés), que se mantuvo en uso hasta 1991. La longitud de desarrollo total del tablero es de 563 m y actualmente es considerado Patrimonio de la Humanidad.

Se sabe que la luz de apoyo es de aproximadamente 160 m, y tiene una altura de 61 m sobre el agua. La distancia entre ambos arcos parabólicos es de 9 m, la altura de las bases de apoyo es de 12 m sobre el agua.

Calcular:

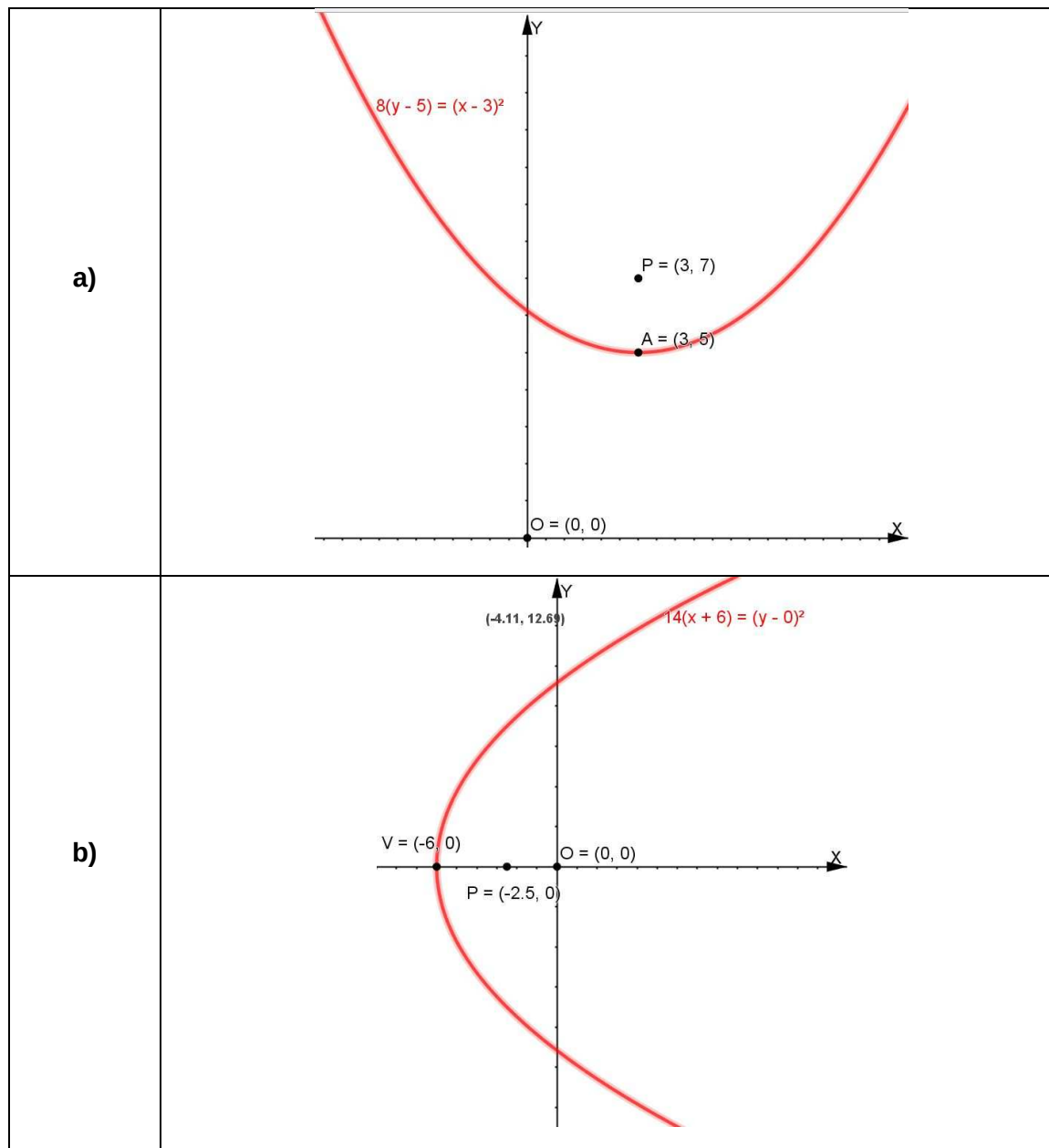
- Las Coordenadas cartesianas del foco, considerando que el vértice de la parábola externa tiene coordenadas $V(0;0)$.
- Coordenadas polares de los puntos de apoyo.
- Longitud del latus rectum.
- El Área entre ambos arcos parabólicos (en m^2).
- Ecuaciones de ambas parábolas desde el punto de vista de la geometría analítica.
- Ecuaciones de ambas parábolas desde el punto de vista del análisis matemático.
- Ecuación de la directriz.
- Graficar a escala.

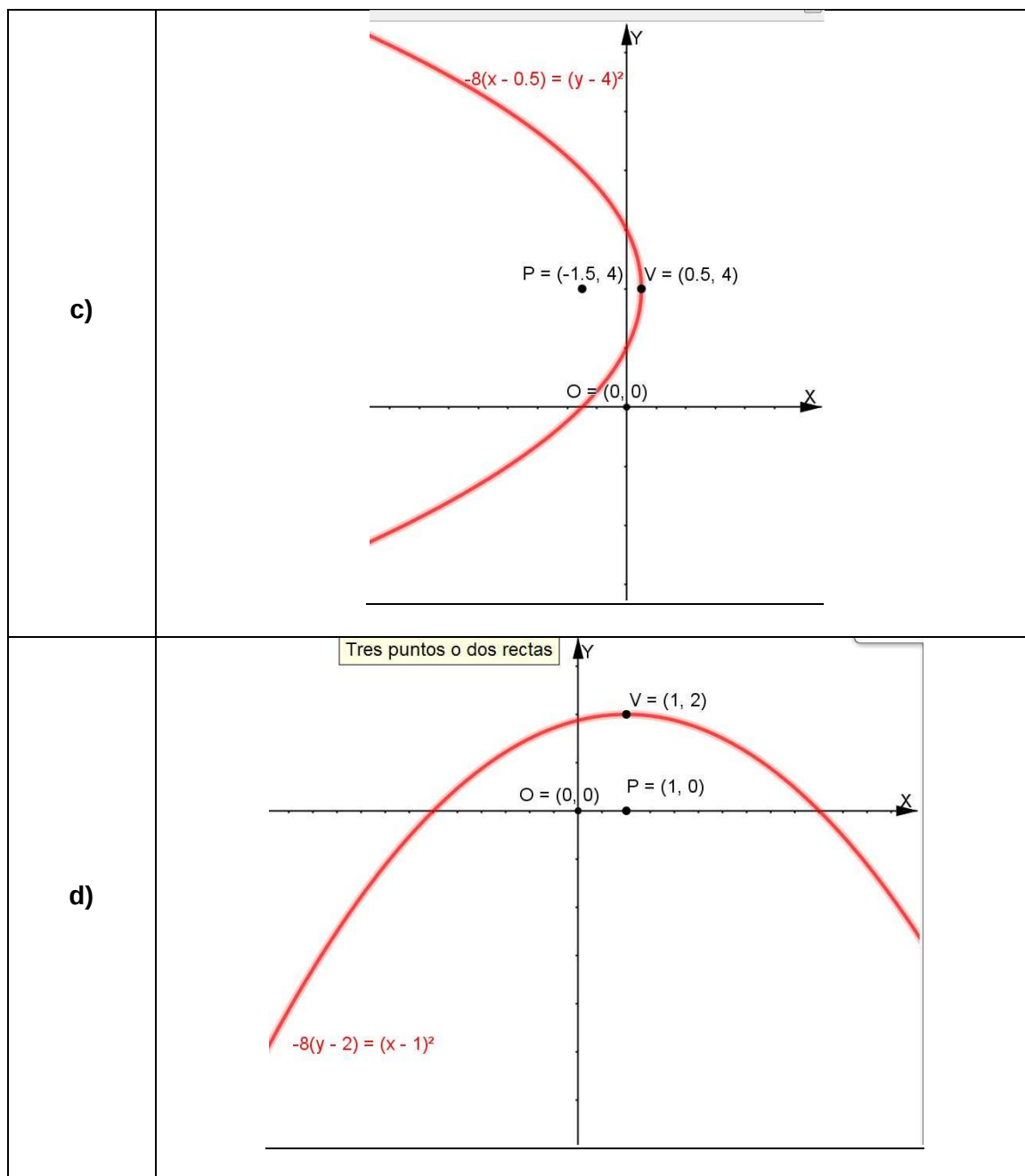


SOLUCIONES

PARABOLA Y PARABOLOIDES

EJERCICIO N°1:





EJERCICIO N°2:

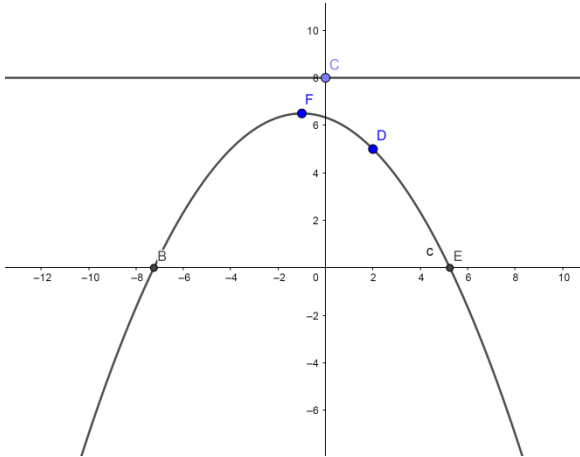
a) $V(0; 0)$, $F(0,6; 0)$ b) 0,6 c) $x = -0,6$ d) 2,4 m e) $0,96 \text{ m}^2$

EJERCICIO N° 3:

- a) $(y-2)^2 = -3(x+0,75)$
- b) $x^2 = 2(y-5)$
- c) $(x-1,5)^2 = -4(y-1,5)$
- d) $(y-1,5)^2 = 4(x-1,5)$

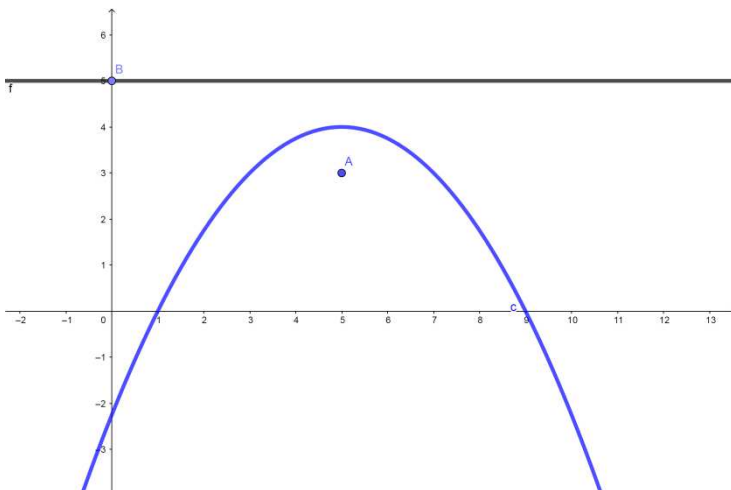
EJERCICIO N° 4:

- a) Ecuación: $(x+1)^2 = -6(y-6,5)$ b) parámetro $p = 1,5$ c) foco $F(-1; 5)$
d) Directriz: $y = 8$ e) LR : 6 m f) Raíces $x_1(-7,24; 0)$ y $x_2(5,24; 0)$



EJERCICIO N° 5:

- a) $y = -0,25x^2 + 2,5x - 2,25$ b) $L_1(3; 3)$ y $L_2(7; 3)$ c) $F(5; 3)$ d) $r_1(1; 0)$ $r_2(9; 0)$



EJERCICIO N°6:

- a) $(x-3)^2 = -0,8(y-4)$
b) $x^2 = 8(y+2)$
c) $(x+3)^2 = 2(y+2)$

EJERCICIO N° 7:

10,3044 m²

EJERCICIO N° 8:

Ecuación $y = 0,25x^2 + 2x$ Área: sector parabólico 21,33m² Volumen: 320 m³

EJERCICIO N° 9:

175,87 m³ Ecuación: $y = x^2 + 24x + 122,28$



EJERCICIO INTEGRADOR:

- a- Foco parábola N°1 (0 ; -1600/49) – Foco parábola N°2 (0 ; -49)
- b- Apoyo izquierdo: $p = 93,81364506\text{m}$ – $\alpha = 211^\circ 29' 14.89''$
Apoyo derecho: $p = 93,81364506\text{m}$ – $\alpha = 328^\circ 30' 45.11''$
- c- Latus Rectum parábola exterior: 130,6122449m
Latus Rectum parábola interior: 160,00m
- d- Área aproximada entre ambas parábolas: 960,00m²
- e- Coordenadas de los puntos de descarga sobre la parábola exterior:
1(-80;-49); 2(-160/3;-196/9); 3(-80/3;-49/9); 4(80/3;-49/9); 5(160/3;-196/9);
6(80;-49)
- f- Ecuación desde la geometría analítica:
Parábola N°1: $x^2 = -130,61y$
Parábola N°2: $x^2 = -160(y + 9)$
- g- Ecuación desde el análisis matemático:
Parábola N°1: $y = -\frac{1}{130,61}x^2$
Parábola N°2: $y = -\frac{1}{160}x^2 - 9$
- h- Ecuación de la directriz:
Parábola N°1: $y = 1600/49$
Parábola N°2: $y = 31$

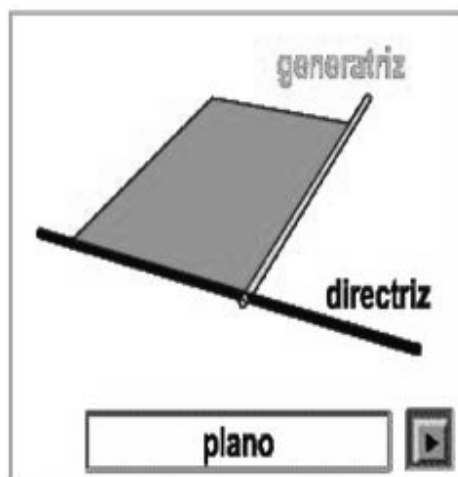
SUPERFICIES REGLADAS EL PLANO

Por
CLARISA LANZILLOTTO

En este último capítulo abordaremos el estudio de la Superficie más sencilla, EL PLANO.

Pertenece a la familia de las Superficies Regladas, aquellas generadas por una recta. Como se observa en la imagen, EL PLANO se genera por una recta que sigue una directriz también recta.

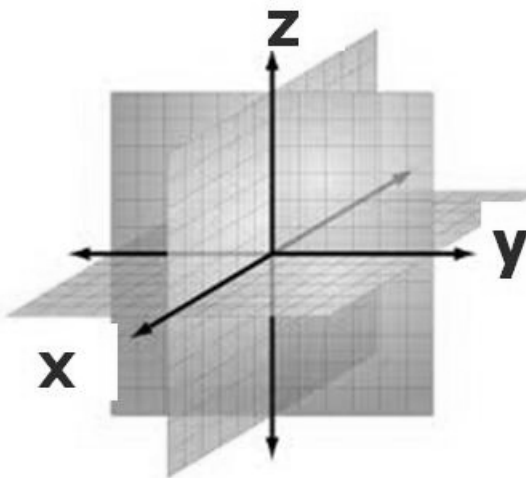
Forma parte del grupo de las **Regladas DESARROLLABLES**, que son las superficies que tienen un plano tangente único a lo largo de cada generatriz y por tanto admiten un “desarrollo plano”. A este grupo también pertenecen los poliedros convexos, la superficie cónica y la superficie cilíndrica.



A la luz de la Geometría Analítica, consideraremos estos aspectos para estudiar EL PLANO:

1. Su ECUACIÓN GENERAL Y ECUACIÓN SEGMENTARIA
2. Sus TRAZAS
3. Sus POSICIONES PARTICULARES RESPECTO DE LOS EJES COORDENADOS
4. Sus POSICIONES PARTICULARES RESPECTO DE LOS PLANOS COORDENADOS

En un primer acercamiento, reconocemos los tres planos coordenados que definen el espacio cartesiano. Son superficies perpendiculares entre sí que se intersectan en el punto origen del sistema de Coordenadas y contienen a los ejes cartesianos. Pueden reconocerse por su nombre y por su ecuación:

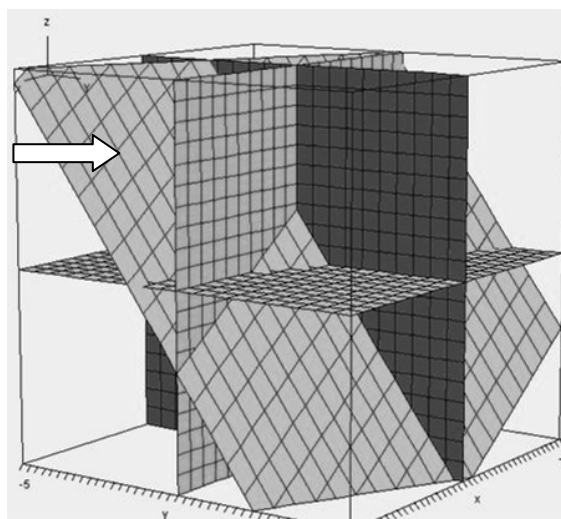


PLANO XY: Ecuación $z=0$

PLANO XZ: Ecuación $y=0$

PLANO YZ: Ecuación $x=0$

Trataremos otros planos posicionados en el espacio, como el que se muestra en la imagen de la derecha (señalado con una flecha) y que responden a ecuaciones completas que pasaremos a describir.

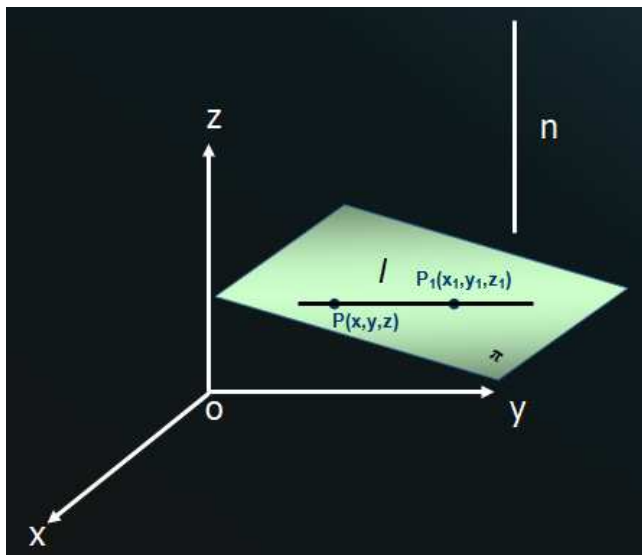


DEFINICIÓN: Todo **PLANO** es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyas coordenadas cartesianas satisfacen una ecuación de la forma:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

No siendo A, B y C nulos a la vez.

Esta es la ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO. Estudiaremos cada uno de los términos que forman esta ecuación:



En la imagen observamos EL PLANO π posicionado en el espacio y la recta "l" que pertenece a π .

Se dan las coordenadas de dos puntos contenidos en la recta "l".

Exterior al plano, se encuentra la recta "n", normal al mismo y que interviene en la definición de la ECUACIÓN GENERAL.

Por definición: **Para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares**

es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus NÚMEROS DIRECTORES correspondientes sea igual a cero.

Si los números directores de la recta normal "n" son **[A , B ,C]**, **estos están presentes en la ecuación general**. También están presentes los componentes de la recta "l" que pertenece al PLANO y que son los números directores **(x-x₁ , y-y₁ , z-z₁)**

Atendiendo a la definición, podemos verificar que:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

Si continuamos resolviendo, llegamos a la siguiente expresión:

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$$

$$- (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = + D$$

Llegamos así a la ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

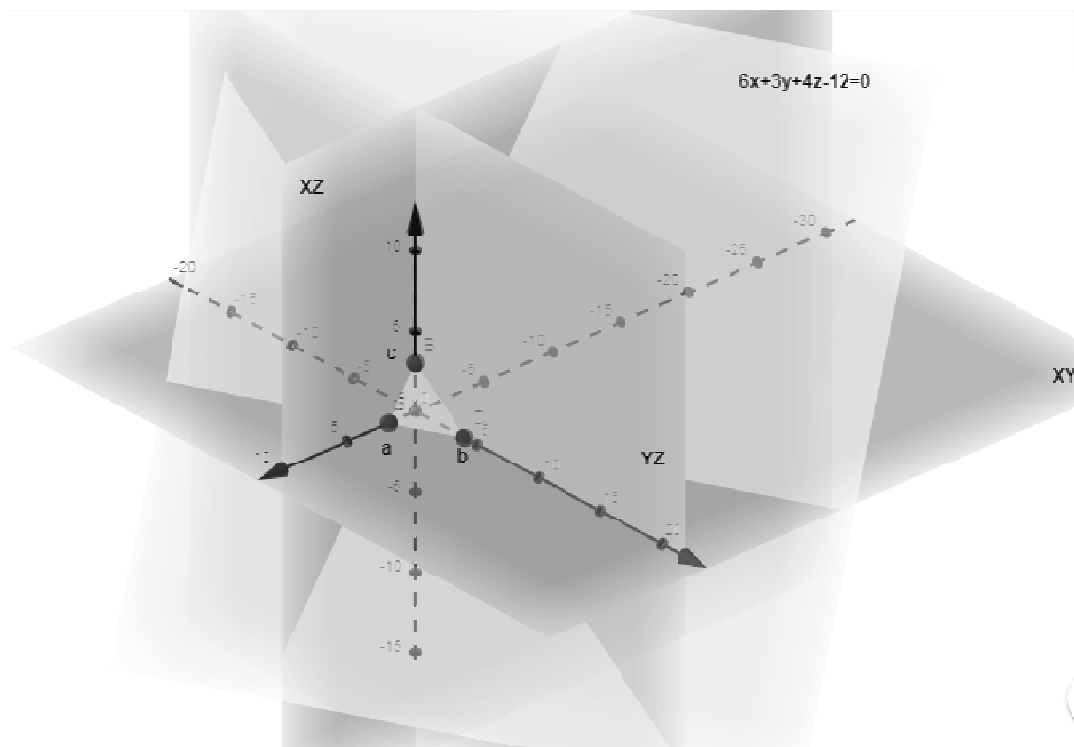
Por ejemplo dado el plano cuya ecuación General es:

$6x + 3y + 4z - 12 = 0$ podemos decir que los números directores de la recta normal "n" al plano son **[6 , 3 ,4]**.

A partir de la ECUACIÓN GENERAL, puede obtenerse otra forma de la Ecuación del Plano que es la ECUACIÓN SEGMENTARIA.

En la imagen construida en Geogebra a partir de la ecuación general dada como ejemplo, puede observarse que el plano de ecuación general $6x+3y+4z-12=0$ intersecciona a los ejes coordenados en 3 puntos, que se mencionan como **a**, **b** y **c**.

a es la abcisa al origen, **b** es la ordenada al origen y **c** es la cota al origen. La forma SEGMENTARIA de la ecuación del plano permite encontrar esos tres puntos.



ECUACIÓN SEGMENTARIA:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

En los denominadores se encuentran justamente **a**, **b** y **c**. Ellos resultan de dividir el término independiente de la Ecuación General, cambiado de signo, por cada uno de los coeficientes de la Ecuación general.

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

Por ende: $\mathbf{a} = \frac{-D}{A}$

$$\mathbf{b} = \frac{-D}{B}$$

$$\mathbf{c} = \frac{-D}{C}$$

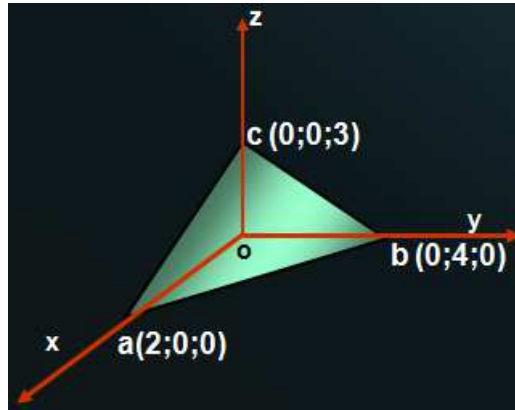
En el ejemplo:

Para el plano cuya ecuación general es: $6x+3y+4z-12=0$, encontraremos **a**, **b** y **c** que son los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados, determinaremos la Ecuación Segmentaria y graficaremos el plano en un SCC espaciales.

$$a = \frac{12}{6} = 2$$

$$b = \frac{12}{3} = 4$$

$$c = \frac{12}{4} = 3$$

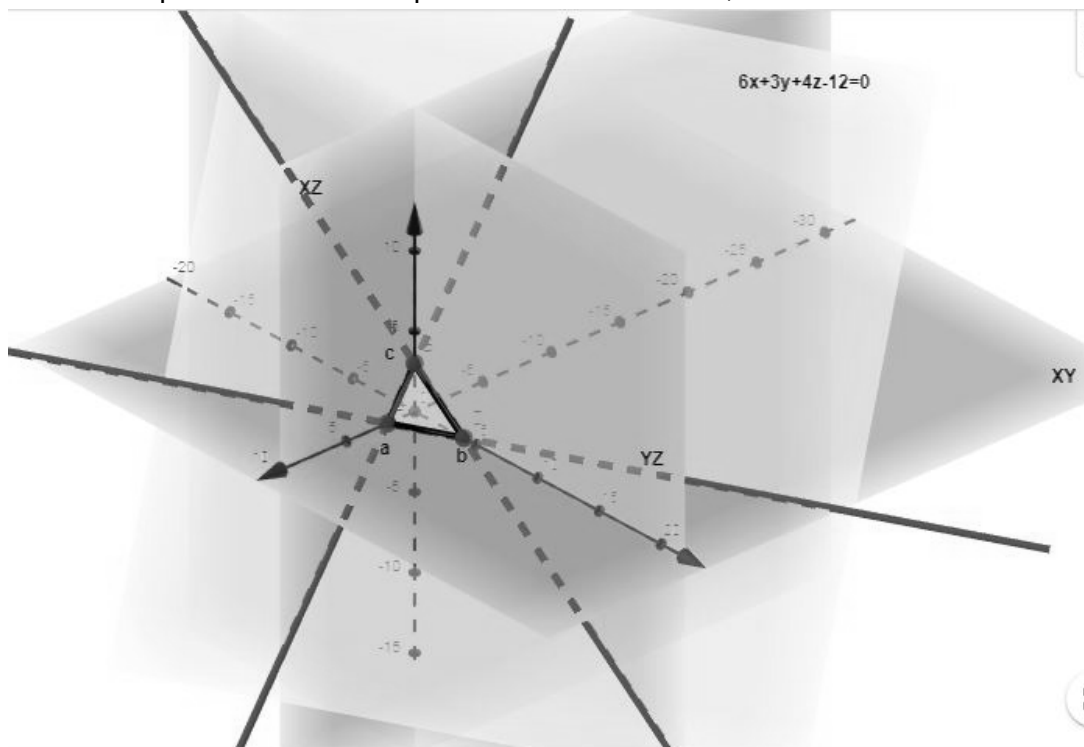


Luego, la ECUACIÓN SEGMENTARIA DEL PLANO considerado será:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$$

En la gráfica, uniendo los puntos queda definido el plano a través de sus **TRAZAS**.

Las **TRAZAS DE UN PLANO**, son justamente las **RECTAS** que resultan de la intersección del plano dado con los planos coordenados XY, XZ e YZ.



Completamos el estudio del PLANO, reconociendo sus trazas a través de las ecuaciones de cada una de esas rectas. Es sencillo encontrar esas ecuaciones, al comprender que:

- **EN EL PLANO XY** $z=0$, por tanto el término que contiene z desaparece de la Ecuación del plano, ya sea ésta la ecuación general o la segmentaria. Para el ejemplo tomaremos la general.

Luego, la ecuación de la TRAZA en el plano XY es:

$$6x+3y-12=0$$

- **EN EL PLANO XZ** $y=0$, por tanto el término que contiene y desaparece de la Ecuación del plano, ya sea ésta la ecuación general o la segmentaria. Para el ejemplo tomaremos la general.

Luego, la ecuación de la TRAZA en el plano XZ es:

$$6x+4z-12=0$$

- **EN EL PLANO YZ** $x=0$, por tanto el término que contiene x desaparece de la Ecuación del plano, ya sea ésta la ecuación general o la segmentaria. Para el ejemplo tomaremos la general.

Luego, la ecuación de la TRAZA en el plano YZ es:

$$3y+4z-12=0$$

En Síntesis diremos que un PLANO es una superficie en el espacio al que le corresponde una ecuación. Hay dos formas de expresar la ecuación del PLANO: la GENERAL y la SEGMENTARIA. A partir de la ECUACIÓN GENERAL se obtiene la SEGMENTARIA y a la inversa, a partir de la SEGMENTARIA puede obtenerse la GENERAL.

De todo PLANO debemos realizar su gráfica identificando los puntos **a**, **b** y **c** y sus TRAZAS. Debemos también determinar las ecuaciones de las trazas.

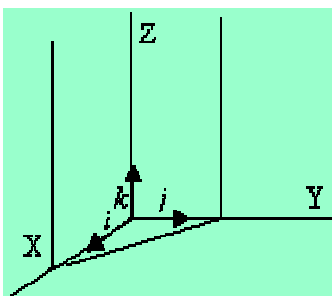
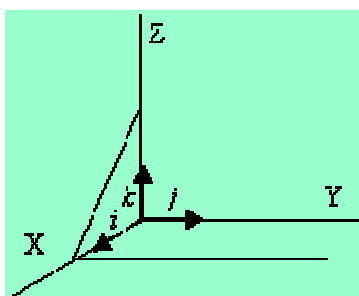
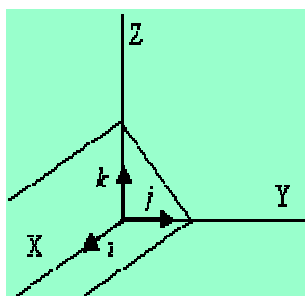
FORMAS INCOMPLETAS DE LA ECUACIÓN DEL PLANO:

■ Plano paralelo a los ejes coordenados:

Si **A = 0** en la ecuación general, el plano es paralelo al eje **x**

Si **B = 0** en la ecuación general, el plano es paralelo al eje **y**

Si **C = 0** en la ecuación general, el plano es paralelo al eje **z**



■ Plano que pasa por el origen:

Si $D = 0$ en la ecuación, el plano pasa por el origen del sistema coordenado.

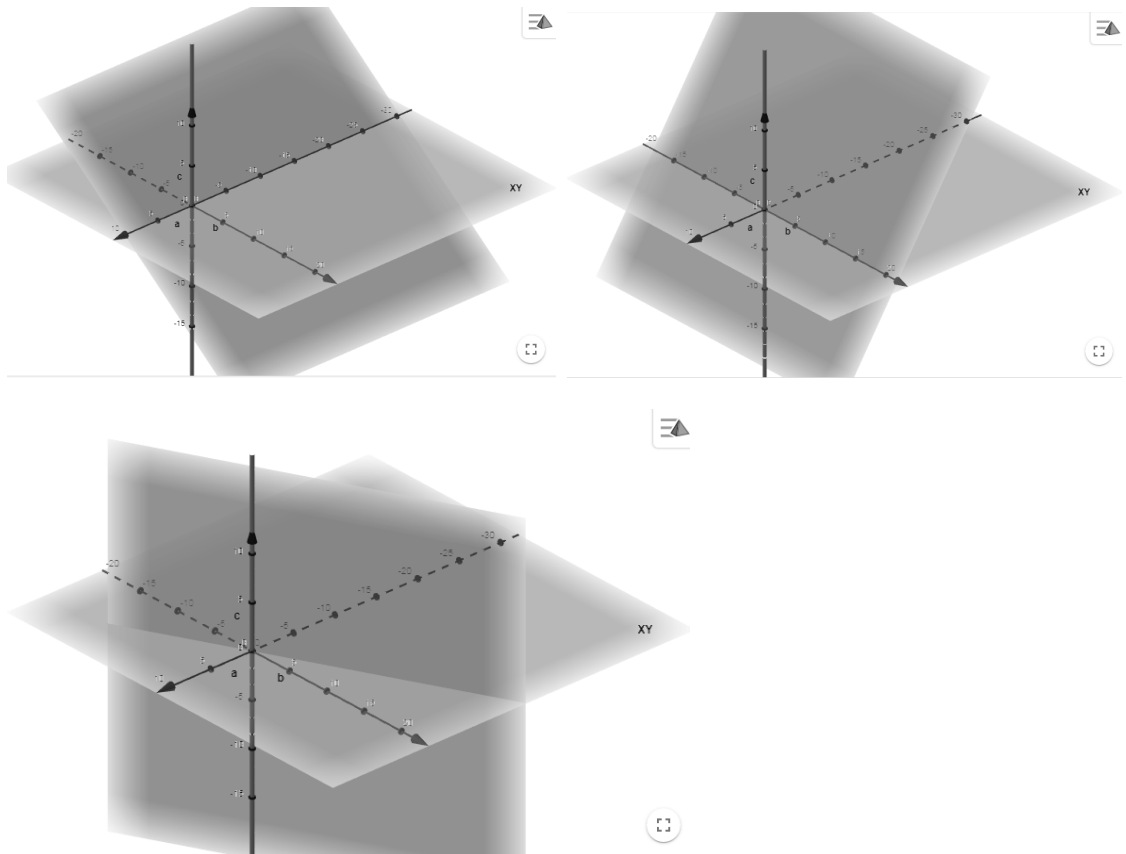
■ Plano que contiene a un eje coordenado:

Si además de faltar un coeficiente en la ecuación general, también falta el término D , el plano contiene a un eje coordenado. Esto se cumple cuando:

$A=0$ y $D=0$ el plano contiene al eje x

$B=0$ y $D=0$ el plano contiene al eje y

$C=0$ y $D=0$ el plano contiene al eje z



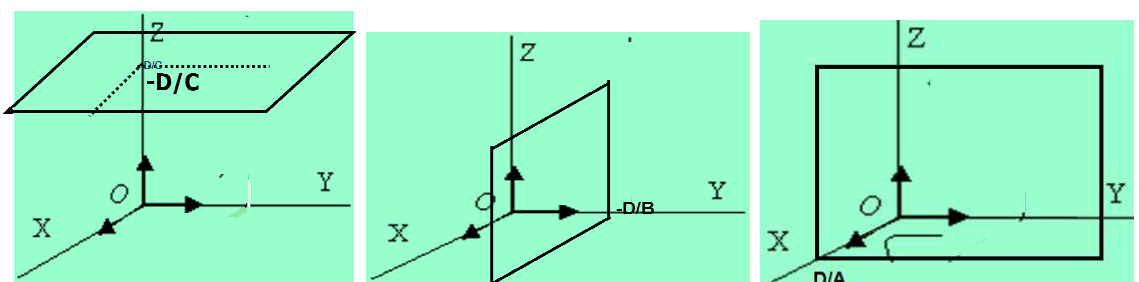
■ Plano paralelo a un plano coordenado

En la ecuación General faltan dos coeficientes.

$A=0$ y $B=0$ el plano es **paralelo al plano XY**

$A=0$ y $C=0$ el plano es **paralelo al plano XZ**

$B=0$ y $C=0$ el plano es **paralelo al plano YZ**



APLICACIONES

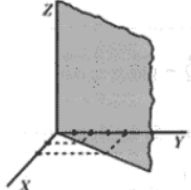
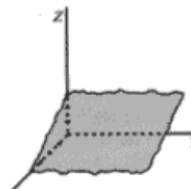
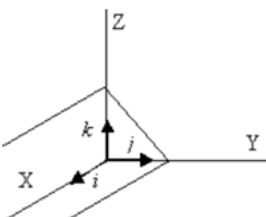
EL PLANO

por MIRIAM AGOSTO

EL PLANO

EJERCICIO N°1:

Para cada uno de los siguientes planos graficados, indicar particularidades del mismo y proponer la ecuación general que le corresponde. Se plantea el primer caso a modo de ejemplo.

GRÁFICA DEL PLANO	PARTICULARIDADES	ECUACION DEL PLANO
Ejemplo 	El plano es paralelo al plano coordenado XZ. El plano interseca al eje coordenado OY. En la ecuación general, los coeficientes de los términos que contienen las variables "x" y "z" se anulan. $Ax + By + Cz + D = 0$	$By + D = 0$
		
		
		

EJERCICIO N°2:

Dadas las ecuaciones de diferentes planos, completar la tabla determinando analíticamente:

- los **puntos de intersección** de cada plano con los ejes coordenados.
- las **trazas** de cada plano.
- representar los planos en un SCC en el espacio.

ECUACIONES DE LOS DEL PLANOS	$-\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} - \frac{z}{2} = 1$	$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$
PUNTOS DE INTERSECCION CON LOS EJES X,Y,Z			
TRAZAS DEL PLANO			
GRÁFICA CORRESPONDIENTE			

EJERCICIO N°3:

Transformar las siguientes ecuaciones generales de cada plano en ecuaciones segmentarias, indicar las trazas y graficar dichos planos en un SCC en el espacio.

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO	$4x + 6y + 3z - 12 = 0$	$x - 3y + 7 = 0$	$6x + 3y + 4z = 12$
ECUACIÓN SEGMENTARIA DEL PLANO			
TRAZAS DEL PLANO			
GRÁFICA CORRESPONDIENTE			

EJERCICIO N°4:

Indicar verdadero o falso en las siguientes afirmaciones. Justificar en caso que sea falso.

a-Un plano queda definido por dos rectas que se cortan.	V	F
b-La intersección de un plano cualquiera con un plano coordenado es un punto.	V	F
c-Se llama cota al origen del plano , a la distancia desde un punto ubicado sobre el eje "x" hasta el origen del SCC en el espacio.	V	F
d-Un plano posicionado en el espacio cartesiano siempre intersecta a los tres ejes coordenados.	V	F
e-En la ecuación general del plano, A, B y C son números directores de una recta que es normal a dicho plano.	V	F

EJERCICIO N°5:

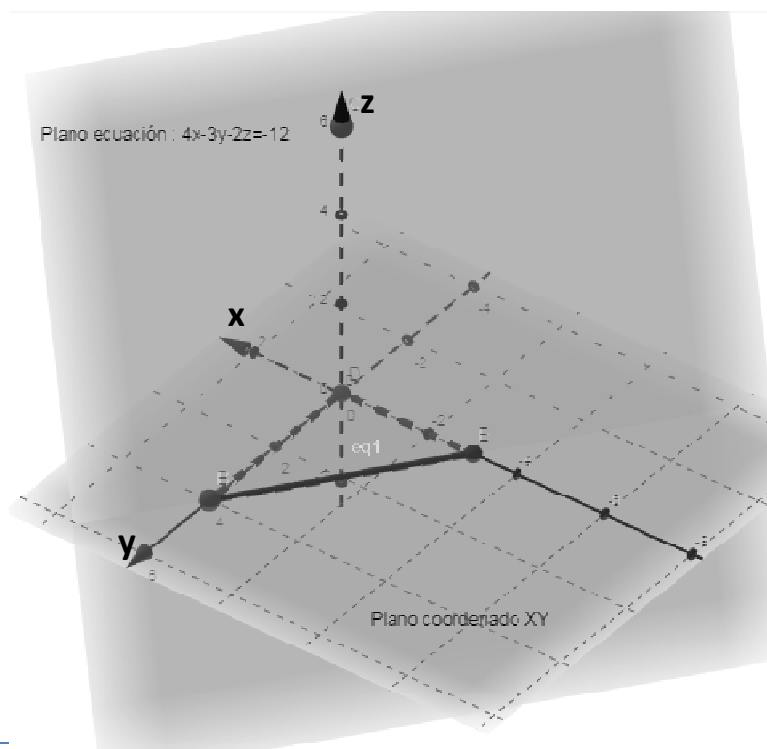
Los puntos de intersección de un plano con los ejes coordenados son P (5;0;0) , M (0;4;0) y Q (0;0;6).Calcular **el área del triángulo, en m²**, definido por la intersección del plano con los planos coordenados. Graficar el plano en un SCC en el espacio.

EJERCICIO N°6:

Un techo de forma triangular inclinado está definido por la intersección de un plano con los tres planos coordenados.(ver gráfico que sigue). La ecuación general de dicho plano es:

$$4x - 3y - 2z = -12$$

Calcular **el área, en m²**, definida por la proyección del techo triangular sobre el plano horizontal (XY).Graficar el plano en un SCC en el espacio.



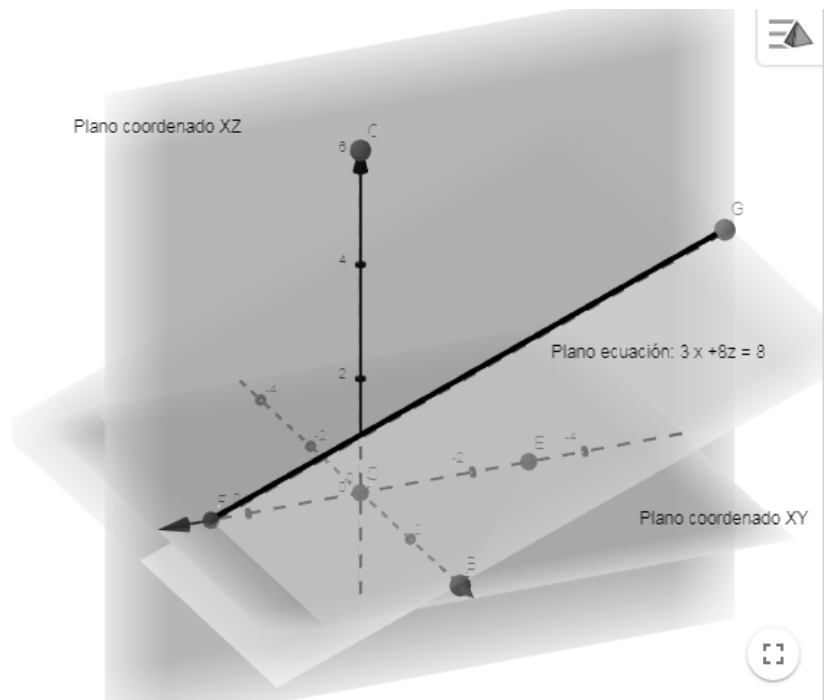
EJERCICIO N°7:

Un plano inclinado es diseñado como cubierta superior de un local. Si la ecuación del plano es:

$$3x + 8z = 8$$

y su pendiente está definida por la traza de dicho plano con el plano coordenado XZ se pide:

- Calcular la **pendiente del plano, expresada en %**.
- Graficar el plano en un SCC espacial.



EJERCICIO N°8:

Un local de 4,80 m de altura tiene planta triangular cuyos lados son: el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la traza de un plano con el plano coordenado XY. Ese plano responde a la ecuación:

$$\frac{x}{3,5} + \frac{y}{4,5} = 1. \text{ Se pide:}$$

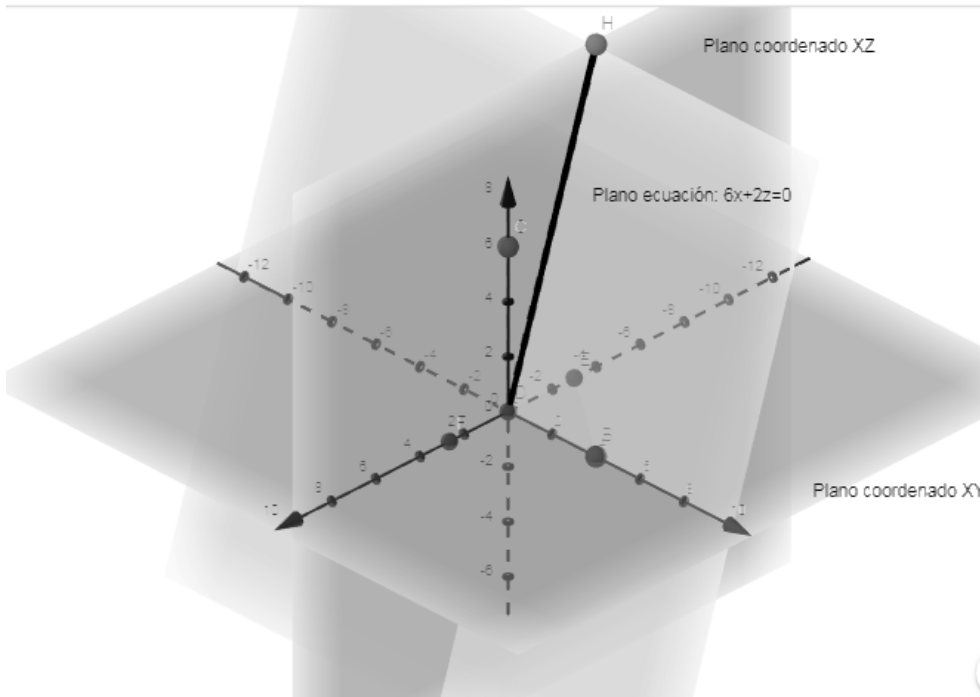
- Calcular el **volumen del local, en m³**.
- Determinar la **ecuación** de un plano de entrepiso paralelo a la base del prisma, que se proyectará a la mitad de la altura del local.
- Graficar

EJERCICIO N°9:

Un plano cuya ecuación es:

$6x + 2z = 0$ define la pendiente de un talud. Se pide:

a) Calcular esa **pendiente, expresada en %**.



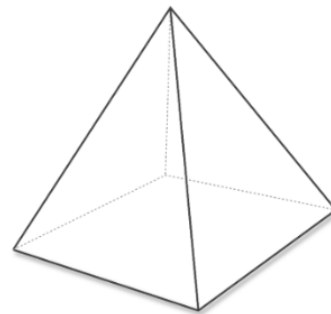
EJERCICIO N°10:

Un monumento está centrado en un SCC en el espacio y tiene forma de pirámide **de base cuadrada**. Sus cuatro caras triangulares son iguales. Cada una de esas caras se corresponde con la intersección de un plano con los planos coordenados XY, XZ e YZ. Si se sabe que la ecuación del plano que define una de las caras triangulares de la pirámide es:

$$3x + 3y + 2z - 9 = 0.$$

Se pide:

- Calcular **el área lateral**, en m^2 o superficie lateral de la pirámide. (Suma del área de las caras)
- Graficar** el plano dado en un SCC en el espacio indicando abscisa al origen, ordenada al origen y cota al origen.
- Determinar analíticamente **las trazas** del plano dado.



**EJERCICIO N°11:**

Los planos de ecuación $x=5$, $y=6$ y $z=7$, definen junto con los planos coordenados un poliedro en el espacio. Se pide:

a) Calcular **el volumen** del poliedro, en m^3 .

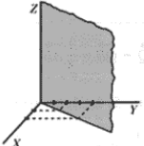
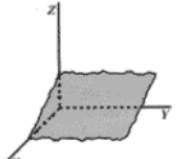
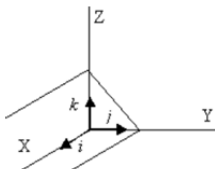
b) Dar **la ecuación** de un plano paralelo al eje "x" que seccione al poliedro en dos cuñas iguales.

c) **Graficar** los planos que forman el poliedro, a escala adecuada, en un SCC en el espacio

SOLUCIONES

EL PLANO

EJERCICIO N°1:

GRÁFICA DEL PLANO	PARTICULARIDADES	ECUACION DEL PLANO
Ejemplo 	El plano es paralelo al plano coordenado XZ. El plano intersecta al eje coordenado OY. En la ecuación general, los coeficientes de los términos que contienen las variables "x" y "z" se anulan. $Ax + By + Cz + D = 0$	$By + D = 0$
	El plano pasa por el origen del sistema coordenado y contiene al eje "z". En la ecuación general, el coeficiente del término que contiene la variable "z" y el término independiente se anulan. $Ax + By + Cz + D = 0$	$Ax + By = 0$
	El plano es paralelo al eje coordenado "y". En la ecuación general, el coeficiente del término que contiene la variable "y" se anula. $Ax + By + Cz + D = 0$	$Ax + Cz + D = 0$
	El plano es paralelo al eje coordenado "x". En la ecuación general, el coeficiente que contiene a la variable "x" se anula. $Ax + By + Cz + D = 0$	$By + Cz + D = 0$

EJERCICIO N°2:

ECUACIONES DE LOS PLANOS	$-\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} - \frac{z}{2} = 1$	$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$
PUNTOS DE INTERSECCION CON LOS EJES X,Y,Z	$(-5;0;0)$ $(0;2;0)$ $(0;0;4)$	$(3;0;0)$ $(0;1;0)$ $(0;0;-2)$	$(6;0;0)$ $(0;3;0)$ $(0;0;1)$
TRAZAS	$-\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1$	$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$



DEL PLANO	$\frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ $-\frac{x}{5} + \frac{z}{4} = 1$	$\frac{y}{1} - \frac{z}{2} = 1$ $\frac{x}{3} - \frac{z}{2} = 1$	$\frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$ $\frac{x}{6} + \frac{z}{1} = 1$
GRÁFICA CORRESPONDIENTE	Realizar	Realizar	Realizar

EJERCICIO N°3:

ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO	$4x + 6y + 3z - 12 = 0$	$x - 3y + 7 = 0$	$6x + 3y + 4z = 12$
ECUACIÓN SEGMENTARIA DEL PLANO	$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$	$\frac{x}{-7} + \frac{y}{7/3} = 1$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$
TRAZAS DEL PLANO	$4x + 6y - 12 = 0$ $4x + 3z - 12 = 0$ $6y + 3z - 12 = 0$	$x + 7 = 0$ $-3y + 7 = 0$	$6x + 3y = 12$ $6x + 4z = 12$ $3y + 4z = 12$
GRÁFICA CORRESPONDIENTE	Realizar	Realizar	Realizar

EJERCICIO N°4:

Indica verdadero o falso en las siguientes afirmaciones. Justifica en caso de que sea falso.

a-Un plano queda definido por dos rectas que se cortan.	V	F
b-La traza de un plano cualquiera con un plano coordenado es un punto.	V	F
c-Se llama cota al origen del plano a la distancia desde un punto ubicado sobre el eje "x" hasta el origen del SCC en el espacio.	V	F
d-Un plano posicionado en el espacio cartesiano siempre intersecta a los tres ejes coordenados.	V	F
e- En la ecuación general del plano, A, B y C son números directores de una recta que es normal a dicho plano.	V	F



EJERCICIO N°5:

Rta: 21,6558 m²

EJERCICIO N°6:

Rta: 6 m²

EJERCICIO N°7:

Rta: 37,5 %

EJERCICIO N°8:

a) Rta: 37,8 m³

b) $z = 2,40$

EJERCICIO N°9:

a) Rta: 300 %

EJERCICIO N°10:

a) Área de las caras = 42,213 m²

b) (3;0;0) (0;3;0) (0;0; 4,5)

EJERCICIO N°11:

a) 210 m³

b) $\frac{y}{6} + \frac{z}{7} = 1$

NO OLVIDES SIEMPRE TENER A MANO LAS FÓRMULAS DE APLICACIÓN. NO HACE FALTA MEMORIZAR. NO SIRVE APLICAR RECETAS. COMPRENDIENDO LOS CONCEPTOS PODRÁN ABORDARSE ADECUADAMENTE Y RESOLVERSE LOS PROBLEMAS.

EN EL AULA MOODLE ENCONTRARÁS VARIADO MATERIAL DE APOYO.

EL EQUIPO DOCENTE SIEMPRE SERÁ GUÍA PARA FAVORECER TU APRENDIZAJE. DEL CUÁL ERES EL PROTAGONISTA.

TRABAJOS PRÁCTICOS

POR
ESTUDIANTES QUE PASARON POR LA CÁTEDRA





PALABRAS FINALES

POR
CLARISA LANZILLOTTO

Abordamos la confección de este libro con gran entusiasmo y dedicación. Es el resultado de un verdadero trabajo en equipo y contiene la impronta de cada uno de nosotros. Quiero agradecer profundamente a todos los docentes de esta maravillosa cátedra que con creatividad y compromiso elaboró la ejercitación adecuada para cada tema. El libro es la muestra de una cátedra unida, como lo es la Matemática con la Arquitectura.

Nuestro deseo es que cuenten con las superficies y las secciones cónicas a la hora de diseñar. Que se animen a incorporarlas en sus proyectos poniendo en juego la creatividad y la riqueza de las mismas. Si esos sucediera, cuenten con nosotros para apoyarlos a la hora de calcular, representar, resolver. Durante la cursada, seremos guías. Ustedes son los verdaderos protagonistas.

Grandes exponentes de la Arquitectura abordaron sus proyectos desde una mirada matemática y geométrica congraciada con el simbolismo y la estética para crear, primero en la mente, representaciones y visualizaciones y luego en un sitio, espacios habitables para el desarrollo de la vida del hombre.

El ejercicio docente tiene recompensas invalorables y alta responsabilidad, porque en el proceso de enseñanza-aprendizaje, donde también aprendemos de nuestros pares y de nuestros alumnos, el fin último es la formación integral del individuo. Para ello diseñamos no sólo las herramientas para provocar un aprendizaje eficaz sino las herramientas para transmitir valores humanos. Esta conjunción persigue un resultado: Colaborar en la formación de personas de bien, que brindarán su saber a la sociedad para construir el futuro. Desde nuestro humilde lugar, nos sentimos privilegiados en poder aportar un pequeño granito de arena y enriquecernos de lo que brindan los demás, para que juntos trabajemos solidariamente en un mismo sentido.





AUTORES: Cátedra Matemática IA y IIA-Arquitectura
Arq. Clarisa LANZILLOTTO-Arq. Miriam AGOSTO
Arq. Mirta HEREDIA- Arq. Silvio CHAILE- Arq. Pablo ALMADA- Arq. Andrea FARIAS
Ing. Patricia CRIVELLO- Prof. Gerardo GNAVI- Ing. Alejandro TORRES