

Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas

Matemática IA y II Arquitectura
F.A.U.D. U.N.C

Índice

GEOMETRÍA ANALÍTICA. Generalidades

GEOMETRÍA ANALÍTICA EN UNA Y DOS DIMENSIONES.

Lugar Geométrico

Sistema Unidimensional. Distancia entre dos puntos.

Sistema de coordenadas en el Plano

Sistema de Coordenadas Cartesianas Rectangulares

Distancia entre dos puntos.

Punto medio de un segmento

Sistema de coordenadas Polares

GEOMETRÍA ANALÍTICA EN TRES DIMENSIONES

Sistema de Coordenadas en el Espacio

Coordenadas Cartesianas Rectangulares

Ángulos de Dirección y Cosenos Directores

Componentes de una recta

Distancia entre dos puntos

Punto medio de un segmento

Dirección de una recta

Angulo de dos rectas

Recta en el espacio

Coordenadas Polares

Coordenadas Cilíndricas

Coordenadas Esféricas

EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

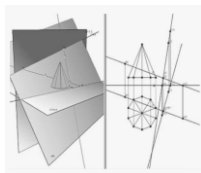
Bibliografía:

Geometría Analítica. Joseph H. Kindle

Geometría Analítica. - Charles Lehmann

Geometría Plana y del Espacio. L. Crusat Prats.

Apuntes de Matemática. Arq. Beatriz Yeremian.



GEOMETRIA ANALITICA



Rene Descartes Nació: 31 de Marzo de 1596 en La Haye, Touraine, Francia
Falleció: 11 de Febrero de 1650 en Estocolmo, Suecia.
Filósofo y Matemático, fue uno de los intelectuales más grande de los que contribuyeron a crear la llamada "Edad de la Razón".

La Geometría Analítica (relativamente nueva dentro de la historia del conocimiento hombre), fue iniciada por el gran matemático y filósofo francés Rene Descartes en su ensayo titulado "La Geometrie", publicado en 1637.

La Geometría Analítica tiene por objeto el estudio de las propiedades geométricas por medio del álgebra, e inversamente se ocupa del estudio de las ecuaciones mediante sus representaciones gráficas.

Este nexo entre **el álgebra**, (la parte científica, pura de la matemática, en la que se trabaja con números y letras, sin gráficos) **y la geometría**, (basada en gráficos y cálculos de gráficos) se establece a través de los sistemas de coordenadas, que son varios, siendo el Cartesiano el más conocido de todos.

Los dos problemas fundamentales de la geometría analítica son:

- a) Dada una ecuación hallar el lugar geométrico que representa.
- b) Dado el lugar geométrico, definido por ciertas condiciones, hallar su ecuación matemática.

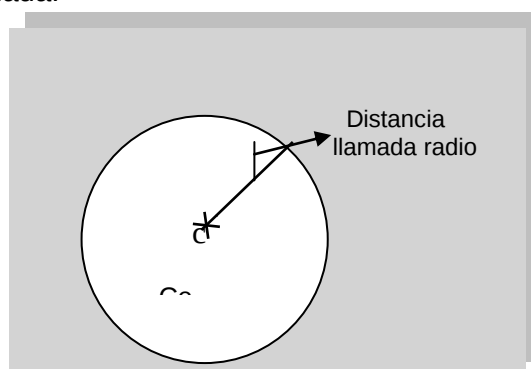
En geometría analítica plana solamente se consideran los puntos situados en un solo plano, el plano coordenado. Las relaciones y propiedades geométricas se expresan por medio de ecuaciones que contienen en general dos variables.

LUGAR GEOMETRICO: o gráfico de una ecuación, es el que contiene todos los puntos y sólo aquellos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación dada.

Es el conjunto de los puntos que cumplen con una cierta condición. (Condición que se puede expresar matemáticamente; generalmente referida al concepto de distancias.

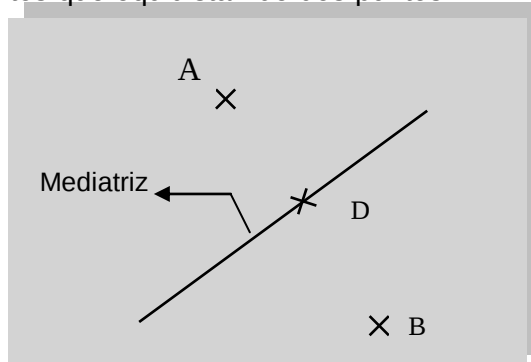
Ejemplo: ¿Cuál es el **lugar geométrico** de un conjunto de puntos que equidistan de otro dado en el plano?

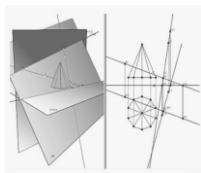
El conjunto de puntos que cumplen con esa condición definen la figura de la **circunferencia**.



¿Cuál es el **lugar geométrico** de un conjunto de puntos que equidistan de dos puntos dados A y B ?

De hecho que D es el punto medio del segmento AB. (o sea que equidista de A y B) Pero también todos los puntos que contiene la recta que pasa por D y es perpendicular a AB. O sea que el lugar geométrico es la **Mediatriz** del segmento AB.





SISTEMA DE COORDENADAS

Es un sistema de ejes de referencias, sobre el cual se puede determinar numéricamente la posición de un punto cualquiera en la recta, en el plano o en el espacio mediante las distancias del punto al origen, a los ejes o a los planos coordenados. Dichas distancias son las coordenadas del punto.

Para representar puntos de coordenadas conocidas, es conveniente adoptar una ESCALA adecuada sobre cada uno de los ejes coordenados.

Los sistemas gráficos (CAD), utilizan diferentes sistemas de coordenadas para la representación de los puntos en pantalla. Es por eso que haremos referencia a los más utilizados tanto para generar las entidades gráficas en dos como en tres dimensiones.

Sistema de Coordenadas Unidimensional.

Este sistema está referido a un eje horizontal que se puede asociar con la recta Real, (donde se representan gráficamente el conjunto de los números reales).

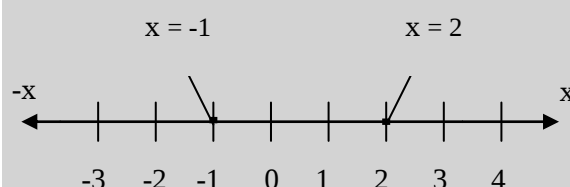
Este eje horizontal esta formado por dos semiejes o semirrectas opuestas que se encuentran en el punto O que es el origen del sistema de coordenadas al que se le asigna abscisa 0. A este eje lo podemos llamar x , y , z , etc.

Existe una correspondencia biunívoca entre el número real y punto del eje real, lo que nos permite hablar indistintamente de número real o de punto del eje real.

Sobre la recta real se pueden visualizar ciertas propiedades de los números.

Sobre el eje real se cumple:

- a- Todo número situado a la derecha de otro es mayor que este.
- b- Todo número situado a la izquierda de otro es menor que este.



En consecuencia

- Todo número positivo es mayor que todo número negativo
- Todo número negativo es menor que todo número positivo
- Cero es mayor que todo número negativo
- Cero es menor que todo número positivo

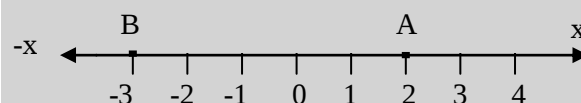
Un punto P en este sistema tendrá una sola coordenada que lo represente. Dicha coordenada es la distancia del punto al origen del sistema.

Así un punto P de coordenada (x_1) puede estar ubicado:

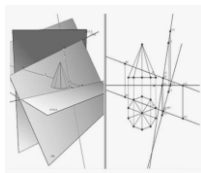
$x_1 < 0$ a la izquierda del origen, x_1 es negativo

$x_1 = 0$ en el origen

$x_1 > 0$ a la derecha del origen, x_1 es positivo



Ejemplo: Representar en un sistema de coordenadas Cartesianas Unidimensional los puntos A (2) y B (-3).



Distancia entre dos puntos.

- La distancia entre los puntos $A(x_1)$ y $B(x_2)$ es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de dichos puntos y se representa por :

$$|\overline{AB}| = |(x_2 - x_1)| = |(x_1 - x_2)|$$

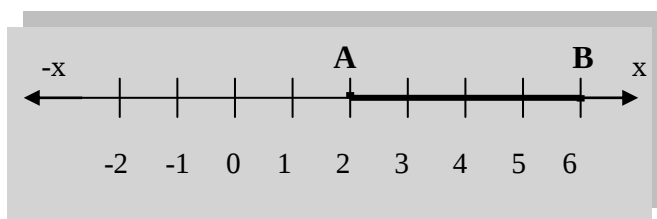
Nótese que la distancia dirigida o desplazamiento del punto A al B puede ser negativa o positiva; pero una distancia nunca puede ser negativa por lo que se toma el valor de la diferencia de las coordenadas de cada punto despojado de su signo, o sea en valor absoluto.

$|\overline{AB}|$ = es la longitud del segmento AB (Las barras | | se lee: valor absoluto)

Ejemplo1: Dados los puntos A (2) y B (6) calcular la distancia entre los mismos.

$$|\overline{AB}| = |(x_2 - x_1)| = |(x_1 - x_2)|$$

$$|\overline{AB}| = |(6 - 2)| = 4 = |(2 - 6)| = |-4| = 4$$



Ejemplo 2: Dados los puntos A(3) y B(-6) calcular la distancia entre los mismos

$$|\overline{AB}| = |(x_2 - x_1)| = |(x_1 - x_2)|$$

$$|\overline{AB}| = |(-6 - 3)| = |-9| = 9 = |(3 - (-6))| = 9$$

En ambos ejemplos la distancia entre los puntos es la **diferencia de las abscisas** de dichos puntos tomados en valor absoluto.

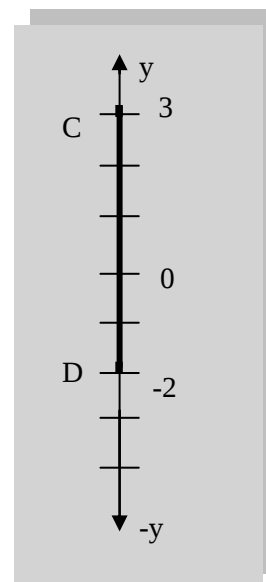
- La distancia vertical entre los puntos $C(y_1)$ y $D(y_2)$ sería

$$|\overline{CD}| = |(y_2 - y_1)| = |(y_1 - y_2)|$$

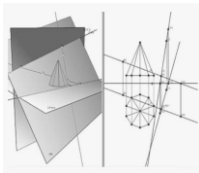
Ejemplo 3: Dados los puntos C(3) y D(-2) calcular la distancia entre los mismos.

$$|\overline{CD}| = |(y_2 - y_1)| = |(y_1 - y_2)|$$

$$|\overline{CD}| = |(-2 - 3)| = |-5| = 5 = |(3 - (-2))| = 5$$



En este caso la distancia de estos puntos es la **diferencia de las ordenadas** de estos puntos tomados en valor absoluto.



SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL PLANO

Sistema de Coordenadas Cartesianas Rectangulares.

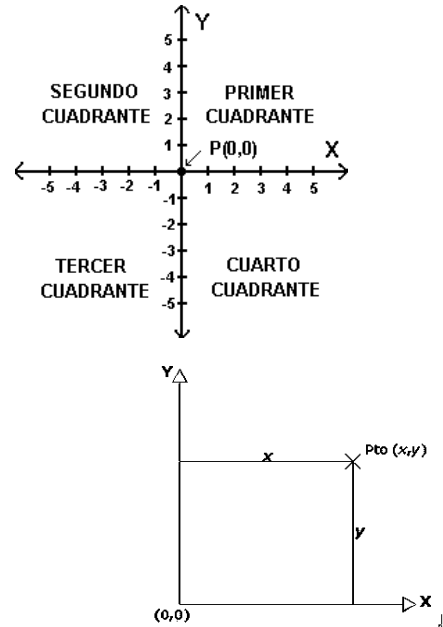
Este sistema divide al plano en cuatro cuadrantes por medio de dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto **o**. La horizontal $-x$ o x se denomina eje **x**, a vertical y o $-y$, eje **y**, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas. El punto **o** se llama *origen* del sistema.

Las distancias de un punto al eje **y** se llama *abscisa* del mismo. La distancia de un punto al eje **x** es la *ordenada*, y ambas constituyen las *coordenadas del punto* en cuestión y se representan por el par ordenado (x, y) .

Las abscisas son positivas cuando el punto está situado a la derecha del eje **y**, y negativas en caso contrario. Las ordenadas son positivas cuando el punto está por encima del eje **x**, y negativas en caso contrario.

Los puntos sobre el eje **x** tienen ordenada 0 $(x;0)$.

Los puntos sobre el eje **y** tienen abscisa 0 $(0; y)$



Distancia entre dos puntos.

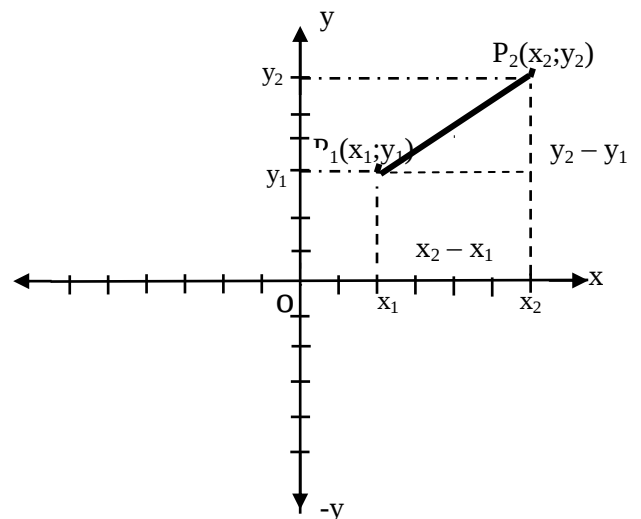
Cuando calculamos la distancia entre dos puntos en el plano, obtenemos la longitud del segmento aplicando el teorema de Pitágoras.

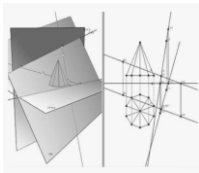
Ejemplo: Dados en el plano los puntos

$P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ calcular la distancia del segmento P_1P_2 .

Según el teorema de Pitágoras:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$





Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas

6

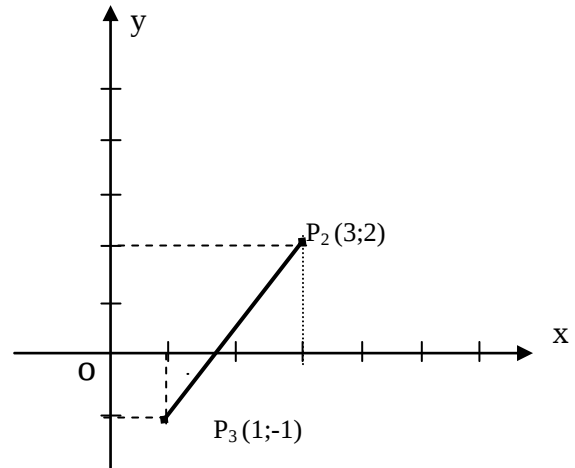
Ejemplo 5:

Dados los puntos $P_1(1; -1)$ y $P_2(3; 2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$



Punto Medio de un Segmento.

Consideremos el segmento determinado por $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ ¿cuáles son las coordenadas **(x; y)** del punto medio **P** en términos de x_1, y_1, x_2, y_2 ?

De acuerdo con el gráfico que se adjunta la **abscisa** del punto medio será:

$$\frac{x_2 - x_1}{P_1P_2} = \frac{x - x_1}{P_1P} \quad (\text{Por semejanza de triángulos})$$

$$\text{Como } P_1P_2 = 2 P_1P$$

Por lo tanto

$$\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x - x_1}{1}$$

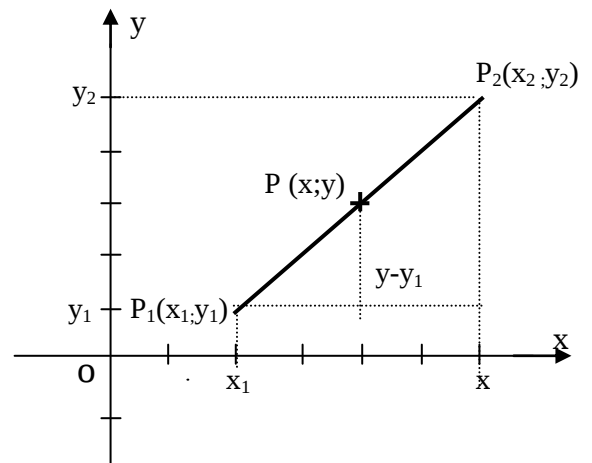
de donde resulta :

$$2x - 2x_1 = x_2 - x_1$$

$$2x = x_1 + x_2$$

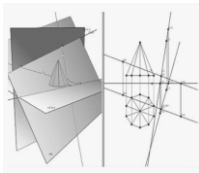
despejando x

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$



De la misma manera se puede deducir la **ordenada y** del punto medio.

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas

7

Concluyendo: La coordenada **x del punto medio** de un segmento es la semisuma de las coordenadas x (abscisas) de los extremos.

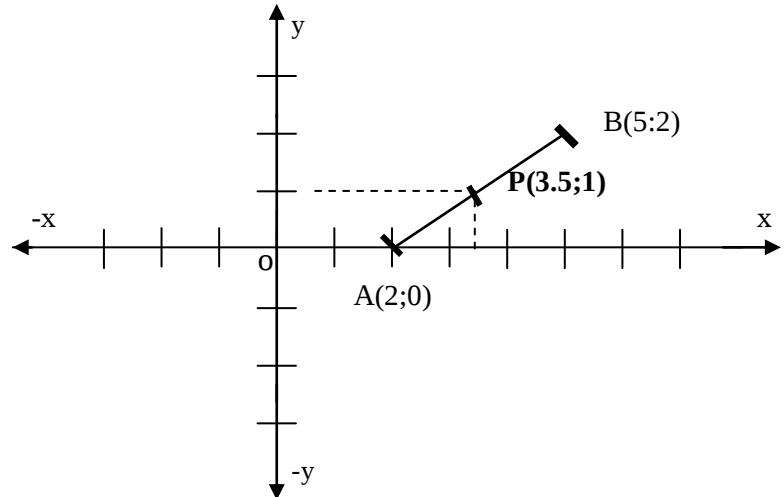
La coordenada **y del punto medio** de un segmento es la semisuma de las coordenadas y (ordenadas) de los extremos.

Ejemplo 6: Las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son A (2; 0) y B (5;2) serán:

$$x = \frac{2 + 5}{2} = 3.5$$

$$y = \frac{0 + 2}{2} = 1$$

P (3.5;1)

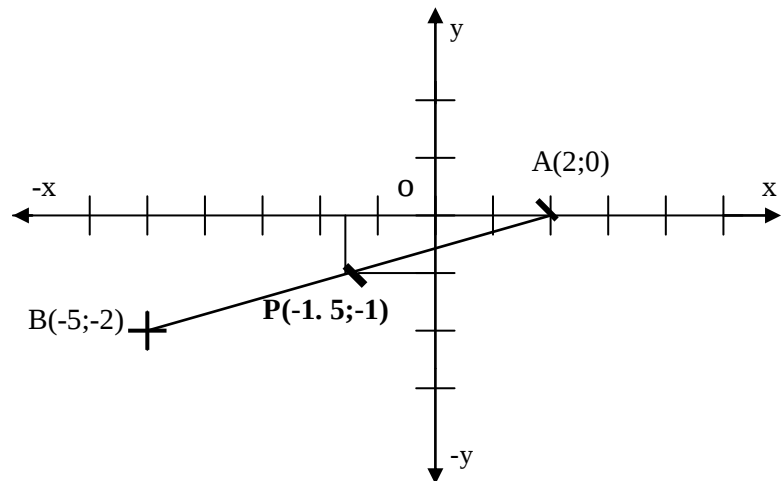


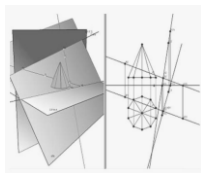
Ejemplo 7: Las coordenadas del punto medio del segmento cuyos extremos son A(2;0) y B(-5; -2) serán:

$$x = \frac{2 + (-5)}{2} = -1.5$$

$$y = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

P(- 1.5 ; -1)





Sistema de Coordenadas Polares.

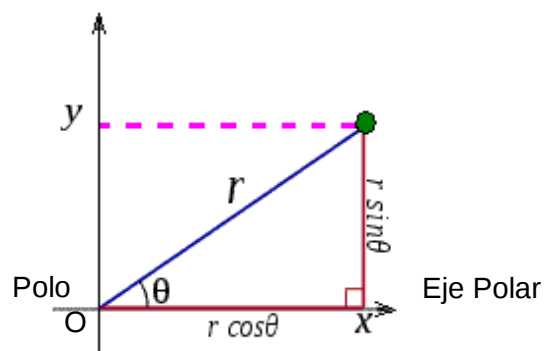
En este sistema de coordenadas, en lugar de fijar la posición de un punto en un plano en función de sus distancias a dos rectas fijas perpendiculares, el mismo se determina especificando su posición relativa con respecto a una recta fija y a un punto fijo de esa recta.

La recta se llama **Eje polar** y el punto fijo se llama **Polo**.

Sea la recta horizontal OA el Eje Polar y el punto O el Polo.

Sea P un punto cualquiera en el plano coordenado. Tracemos el segmento OP y designemos su longitud por r . Llamemos θ al ángulo AOP. Evidentemente la posición del punto P con relación al eje polar y al polo es determinada cuando se conocen r y θ .

Estas dos cantidades se llaman las coordenadas polares del punto P; en particular r se llama **radio vector** y θ **ángulo polar o argumento** de P. El ángulo θ al igual que en trigonometría, es positivo cuando se mide en sentido contrario a las agujas del reloj.



Relación entre las coordenadas rectangulares y polares.

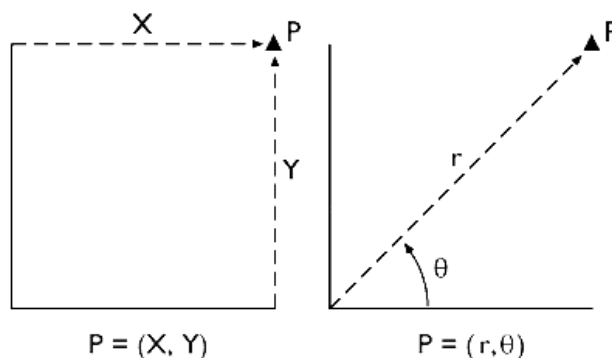
Para efectuar el paso de un sistema de coordenadas a otro debemos conocer las relaciones que existen entre las coordenadas polares y las rectangulares. Se obtienen relaciones muy simples cuando el Polo y el Eje Polar del sistema Polar se hacen coincidir con el Origen y la parte positiva del eje X del sistema rectangular.

Consideremos al punto P de coordenadas polares $(r; \theta)$, y rectangulares $(x; y)$.

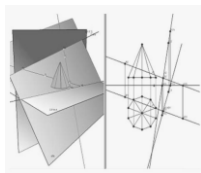
De la figura se deducen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$



Las dos primeras relaciones nos permiten calcular las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto conocido las coordenadas polares, las otras dos, las coordenadas polares cuando las conocidas son las cartesianas.



GEOMETRIA ANALITICA EN EL ESPACIO

La Geometría Analítica plana es la base para comprender la Geometría Analítica en el espacio tridimensional. De hecho, se aplican los mismos principios con sus ajustes necesarios.

Para su estudio comenzaremos por romper algunas restricciones que nos impedirían el estudio de las figuras en tres dimensiones. Esto es no solo considerar los puntos situados en el plano coordenado sino por el contrario suponer como válido que un punto puede ocupar cualquier posición en el espacio. Esto implica que para localizar un punto en el espacio se requiere de otra dimensión además de las dos dimensiones del sistema coordenado plano.

En consecuencia, en la Geometría Analítica espacial, las relaciones y propiedades geométricas contienen en general tres variables y resulta evidente comprender que esta variable adicional, implica mayor complejidad analítica que las relaciones en el plano.

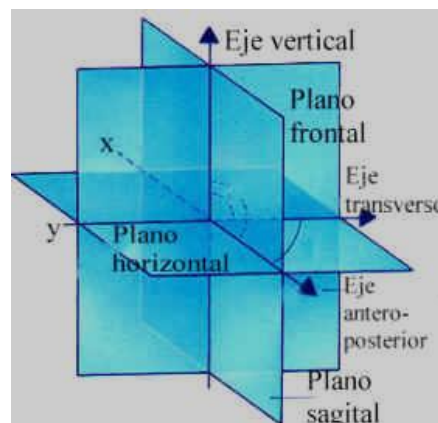
SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

Coordenadas Cartesianas

La posición de un punto en un plano se define por medio de las dos distancias de éste a dos ejes que se cortan y que, normalmente son perpendiculares entre sí (rectangulares). En el Espacio la posición de un punto se determina mediante sus distancias a tres planos mutuamente perpendiculares que se cortan en un punto común o. Como el punto en el Espacio va a localizarse con referencia a estos elementos, los planos se llaman *planos coordenados*. Las distancias del punto a esos planos se denominan coordenadas del punto.

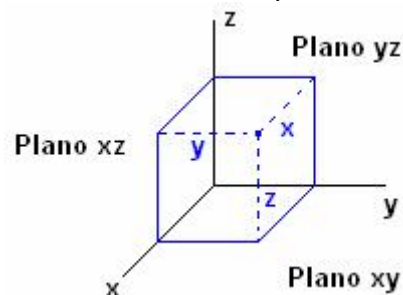
Las rectas de intersección de los planos coordenados son los ejes ox , oy y oz que se llaman **ejes coordenados** y cuyo sentido positivo se indica mediante flechas. El punto o se considera como el origen de referencia de cada uno de los tres ejes.

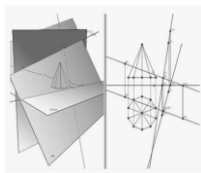
Los **planos coordenados** dividen el Espacio en ocho octantes numerados de la siguiente manera: el octante I esta limitado por los semiejes positivos x , y y z ; los octantes II, III y VI son los situados por encima del plano xy y numerados en sentido contrario a las agujas del reloj. Los octantes V, VI, VII y VIII situados por debajo del plano xy correspondiente el V con el I, etc. Ver gráfico adjunto.



Es conveniente examinar en el espacio, además de los ejes coordenados, los planos coordenados, es decir los planos que pasan por dos ejes coordenados cualesquiera.

Estos planos son: el plano xy (que pasa por los ejes x e y), o sea el conjunto de los puntos de la forma $(x,y,0)$, donde x,y son números arbitrarios; el plano xz , (que pasa por los ejes x y z), o sea el conjunto de los puntos de la forma $(x,0,z)$, donde x y z son números arbitrarios; el plano yz (que pasa por los ejes y y z), o sea el





Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas

10

conjunto de los puntos de la forma $(0, y, z)$, donde y y z son números arbitrarios

Los tres planos axiales tienen como ecuación

$x = 0$ definimos el plano yz
 $y = 0$ definimos el plano xz
 $z = 0$ definimos el plano xy

Los ejes coordenados tienen como ecuación

El eje x	$y = z = 0$	Los puntos sobre el eje x tienen coordenadas $(x, 0, 0)$
El eje y	$x = z = 0$	Los puntos sobre el eje y tienen coordenadas $(0, y, 0)$
El eje z	$x = y = 0$	Los puntos sobre el eje z tienen coordenadas $(0, 0, z)$

Cada conjunto de tres números dados en un cierto orden (primero x , **después** y y finalmente z) permite establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y los conjuntos ordenados de tres números que son las coordenadas de esos puntos.

En la figura que se adjunta, las distancias SP , QP y NP son respectivamente las coordenadas x, y, z del punto P y se representan por **$P(x, y, z)$**

La distancia OP del punto P al origen O es:

$$|OP| = \sqrt{ON^2 + NP^2} \quad (1)$$

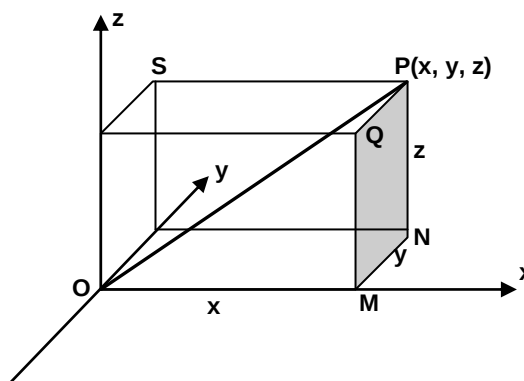
$$ON^2 = OM^2 + MN^2 \quad (2)$$

Reemplazando ON^2 (1) por su igual en (2)

$$|OP| = \sqrt{OM^2 + MN^2 + NP^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$OP = \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Luego si $OP = \rho$ se tiene $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$



Ángulos de Dirección y Cosenos directores

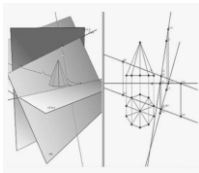
En geometría analítica plana vimos que la dirección de una recta se determina por medio de su ángulo de inclinación o de su pendiente.

Veremos a continuación como determinar la dirección de una recta en el espacio.

Dos rectas cualesquiera en el espacio, que están en el mismo plano (Coplanarias), pueden cortarse o no, si no se cortan se dice que son paralelas. Si ambas rectas no están en el mismo plano no pueden ni cortarse ni ser paralelas, se llaman entonces rectas que se cruzan.

El ángulo de dos rectas que se cruzan es el ángulo formado por dos rectas cualesquiera que se cortan, son paralelas y tienen el mismo sentido respectivamente las rectas dadas.

La dirección de una recta cualquiera se determina por los ángulos que la misma forma con los ejes coordenados.



Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas

11

Vamos a determinar la dirección de una recta r cuya posición en el espacio está dada por dos de sus puntos

El origen $O(x_1, y_1, z_1)$ y el punto $P(x, y, z)$

Las coordenadas del punto O (origen del sistema de coordenadas son $(0,0,0)$)

Sean α , β , y γ los ángulos que OP forma con los ejes coordenados ox , oy , y oz respectivamente.

Podemos verificar

$$x = \rho \cos \alpha, \quad y = \rho \cos \beta, \quad z = \rho \cos \gamma$$

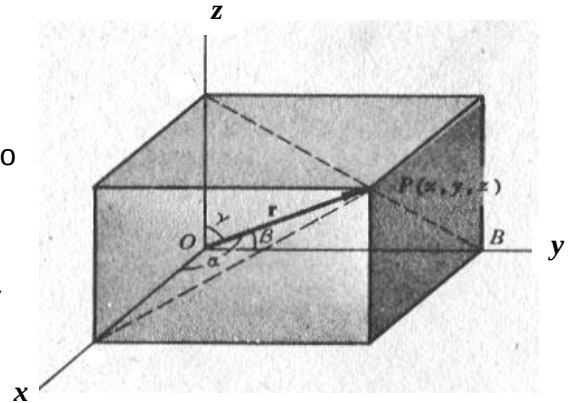
Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 = \rho^2 \cos^2 \alpha + \rho^2 \cos^2 \beta + \rho^2 \cos^2 \gamma$$

$$\rho^2 = \rho^2 \cos^2 \alpha + \rho^2 \cos^2 \beta + \rho^2 \cos^2 \gamma$$

Sacando factor común ρ^2

$$\rho^2 = \rho^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$



Dividiendo ambos miembros por ρ^2

$$1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

Propiedad fundamental: la suma de los cuadrados de los cosenos directores de una recta en el espacio es siempre igual a la unidad.

También se verifican las siguientes relaciones

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\rho}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\rho}$$

- Los ángulos α , β y γ son los ángulos de la dirección de OP y sus cosenos se llaman **cosenos directores de OP**

Si una recta no pasa por el origen O sus ángulos de dirección α , β y γ son los que forman con los ejes una recta paralela a la dada que pasa por origen O

Los ángulos directores pueden tener cualquier valor desde 0° hasta 180° inclusive.

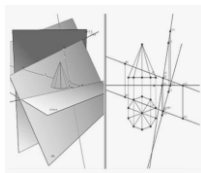
Componentes de una recta

En lugar de los cosenos directores de una recta l muchas veces se emplean tres números reales, llamados **números directores de l** , que sean proporcionales a sus cosenos directores. Estos números son las componentes de la recta.

Así a , b , c son los números directores de una recta l siempre que

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{b}{\cos \beta} = \frac{c}{\cos \gamma}$$

En donde $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$. Son los cosenos directores de l .



Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas

12

Los números directores a, b, c de una recta en el espacio se representan encerrados entre corchetes $[a, b, c]$

Recordemos que un sistema de números directores para una recta que pasa por los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ está dado por

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \\ a, b, c \end{bmatrix}$$

Para hallar los cosenos directores de una recta cuyas componentes son a, b, c se dividen estos tres números por

$$\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos \beta = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\cos \gamma = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Se tomara el signo adecuado para que los cosenos directores tengan el que les corresponde.

Tres números reales cualesquiera para $r \neq 0$ pueden constituir el sistema de números directores. Del número infinito de ternas elegimos para simplificar el cálculo, aquel compuesto por valores enteros mínimos.

Ejemplo:

Los números directores de una recta l son $(2, -2, -1)$ Hallar los cosenos directores de la recta l si la misma está dirigida de tal sentido que el Angulo β es agudo.

Solución:

Planteado según vimos para el cálculo de los cosenos directores

$$\cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}$$

$$\cos \beta = \pm \frac{-2}{3}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{-1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}$$

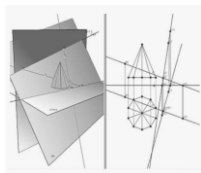
$$\cos \gamma = \pm \frac{-1}{3}$$

Como l está dirigida de tal manera que el ángulo β es agudo, el cose del mismo debe ser positivo (nótese que en el cálculo correspondiendo el valor de un angulo cuyo coseno es igual a $-2/3$ es de $131^\circ 48' 37.12''$). Por lo tanto, tomando los signos inferiores para los cosenos tendremos

$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{3}$$



Distancia entre dos puntos

De la misma manera que calculamos la distancia entre dos puntos en el plano, podemos calcular la distancia entre dos puntos en el Espacio.

La distancia entre dos puntos $A(x_1; y_1; z_1)$ y $B(x_2; y_2; z_2)$ será:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Punto Medio de un Segmento

Las coordenadas del punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

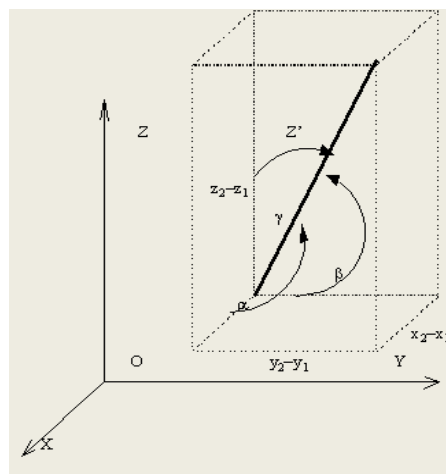
Dirección de una recta

Los cosenos directores de la recta l que contiene a los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ Son:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

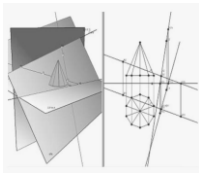


Angulo de dos rectas

Vamos a determinar **el ángulo θ** formado por dos rectas dirigidas en el espacio l_1 y l_2 trazadas por el origen y paralelas y del mismo sentido a las rectas l'_1 y l'_2 **respectivamente**.

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto perteneciente a la recta l_1 y distinto del origen y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ otro punto perteneciente a la recta l_2 y también distinto del origen

Llamaremos d_1 a la distancia del origen al punto P_1 , d_2 a la distancia del origen al punto P_2 y d a la distancia entre P_1 y P_2



$$d_1 = |OP_1|$$

$$d_2 = |OP_2|$$

$$d = |P_1 P_2|$$

Por el teorema del coseno

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_2 \cos \theta$$

$$0 = d_1^2 + d_2^2 - 2 d_1 d_2 \cos \theta - d^2$$

$$\cos \theta = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d^2}{2 d_1 d_2} \quad (1)$$

sabemos que la distancia entre el punto y el origen sera

$$d_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$d_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$$

y la distancia d entre los puntos P1 y P2

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad \text{Sustituyendo y simplificando en (1)}$$

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{d_1 d_2} \quad (2)$$

Ahora bien, sean α_1, β_1 y γ_1 los ángulos directores de la recta l_1 y α_2, β_2 y γ_2 los de la recta l_2 tenemos

$$x_1 = d_1 \cos \alpha_1$$

$$y_1 = d_1 \cos \beta_1$$

$$z_1 = d_1 \cos \gamma_1$$

y

$$x_2 = d_2 \cos \alpha_2$$

$$y_2 = d_2 \cos \beta_2$$

$$z_2 = d_2 \cos \gamma_2$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2) obtenemos la relación buscada.

El ángulo θ formado por dos rectas dirigidas cualesquiera en el espacio, cuyos ángulos directores son $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ y $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ respectivamente, se determinan por la relación

$$\cos \theta = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2$$

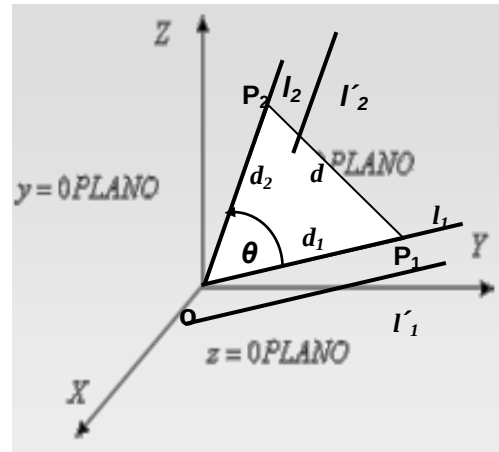
Se deduce a partir de esta relación que:

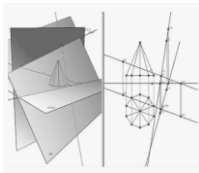
- Para que dos rectas sean paralelas y del mismo sentido, es condición necesaria y suficiente que sus ángulos directores sean iguales; para que sean paralelas y de sentidos opuestos, es necesario y suficiente que sus ángulos directores correspondientes sean suplementarios.

- Para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus cosenos directores sea igual a cero.

*** El coseno de un ángulo de 90° es igual a cero

También podemos calcular el ángulo θ formado por dos rectas cualesquiera dirigidas en el espacio conocidos los números directores de ambas





Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas

15

Diremos entonces que el ángulo θ por dos rectas cualesquiera dirigidas en el espacio cuyos números directores son $[a_1, b_1, c_1]$ y $[a_2, b_2, c_2]$ se determina por la relación

$$\cos \theta = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{|d_1| |d_2|}$$

A partir de esta relación se deduce

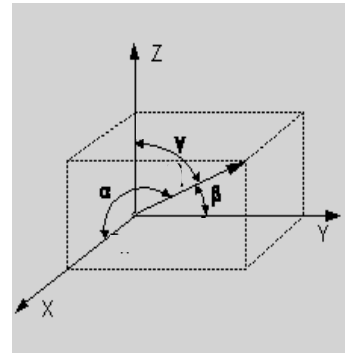
- Para que dos rectas dirigidas sean paralelas es necesario y suficiente que sus números directores correspondientes sean proporcionales.
- Para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus números directores correspondientes sea igual a cero.

Recta en el espacio

Recordemos que una recta en el plano queda determinada si se conocen dos condiciones, por ejemplo dos de sus puntos, un punto y su pendiente.

En el espacio una recta queda determinada especificando su dirección y uno de sus puntos.

Sean α, β y γ los ángulos directores de la recta L y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto generico de ella. La recta L es el lugar geometrico de los puntos $P(x, y, z)$ tales que



$$x - x_1 = t \cos \alpha, \quad y - y_1 = t \cos \beta, \quad z - z_1 = t \cos \gamma \quad \text{O bien}$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t \cos \alpha \\ y &= y_1 + t \cos \beta \\ z &= z_1 + t \cos \gamma \end{aligned}$$

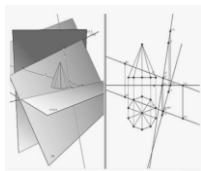
En donde t es un parametro que representa la longitud variable entre P_1 y P

Esta es la forma paramétrica de la ecuación de la recta en el espacio

La recta que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y cuyos ángulos directores son α, β y γ , se puede expresar mediante las siguientes ecuaciones que reciben el nombre de **Forma Continua** de la ecuación de la recta en el espacio.

$$\frac{x - x_1}{\cos \alpha} = \frac{y - y_1}{\cos \beta} = \frac{z - z_1}{\cos \gamma}$$

Además de las coordenadas cartesianas rectangulares, existen otros sistemas de coordenadas muy útiles y que se emplean con frecuencia como son las coordenadas polares, las cilíndricas y las esféricas.



Geometría Analítica

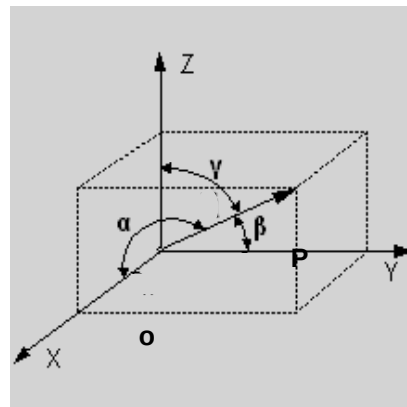
Sistema de Coordenadas

16

En los sistemas CAD se utilizan diferentes sistemas de coordenadas para la introducción de los puntos en pantalla. . Por ejemplo AutoCad (Software de aplicación orientado al diseño) dispone de varios sistemas de coordenadas. Coordenadas cartesianas rectangulares y coordenadas polares para el ingreso de datos y generación de dibujos en 2D (Bidimensional) Coordenadas Cartesianas Rectangulares (3D), cilíndricas y esféricas para la creación de gráficos en 3D. (Tridimensional)

Coordenadas polares

Las coordenadas polares de un punto P del espacio son $(\rho; \alpha; \beta; \gamma)$ siendo ρ la distancia OP y α, β , y γ los ángulos de la dirección de OP. Las relaciones que ligan las coordenadas polares y las rectangulares son:



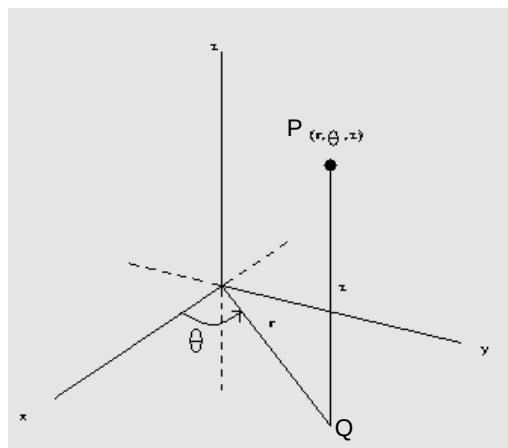
$$x = \rho \cos \alpha \quad y = \rho \cos \beta \quad z = \rho \cos \gamma \quad \text{Polares a } \Rightarrow \text{Cart. Rectang}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\rho} \quad \beta = \arccos \frac{y}{\rho} \quad \gamma = \arccos \frac{z}{\rho} \quad \text{Cart. Rectang a } \Rightarrow \text{Polares}$$

Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas de un punto P son : $(\rho; \theta; z)$, donde ρ y θ son las coordenadas polares de la proyección Q del punto P sobre el plano xy. Las coordenadas del punto P se escriben entre paréntesis y en el siguiente orden $(\rho; \theta; z)$.



Las relaciones que ligan las coordenadas cilíndricas con las rectangulares son:

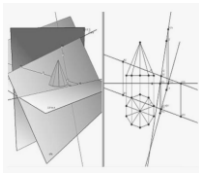
$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z \quad \text{Cilíndricas a } \Rightarrow \text{Cart. Rectang.}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$\text{Cart. Rectang. a } \Rightarrow \text{Cilíndricas}$$

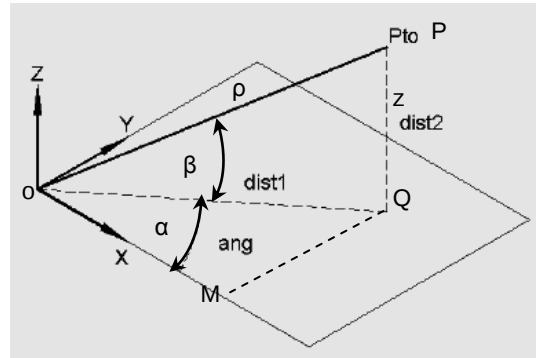


Coordenadas Esféricas

Sea $P(x; y; z)$ un punto dado en coordenadas rectangulares y Q su proyección sobre el plano xy . Llamaremos ρ a la distancia OP como en el caso de las coordenadas polares en el espacio, α al ángulo MOQ y β al ángulo QOP .

La coordenada ρ es el radio vector, α es el ángulo en el plano xy y β es el ángulo de elevación (con respecto al plano xy).

Las coordenadas esféricas del punto P se escriben entre paréntesis y en el siguiente orden $P(\rho; \alpha; \beta)$.



Las relaciones que ligam las coordenadas esféricas y las rectangulares son:

En el triángulo OQP

$$\sin \beta = \frac{z}{\rho} \quad \therefore \quad z = \rho \sin \beta$$

$$\cos \beta = \frac{OQ}{\rho} \quad \therefore \quad OQ = \rho \cos \beta \quad (1)$$

En el triángulo OMQ

$$\cos \alpha = \frac{x}{OQ} \quad \therefore \quad x = OQ \cos \alpha \quad (2)$$

reemplazando a OQ en (2) por su igual en (1)

$$x = \rho \cos \beta \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{OQ} \quad \therefore \quad y = OQ \sin \alpha \quad (3)$$

reemplazando a OQ en (3) por su igual en (1)

$$y = \rho \cos \beta \sin \alpha$$

$$x = \rho \cos \beta \cos \alpha$$

$$y = \rho \cos \beta \sin \alpha$$

$$z = \rho \sin \beta$$

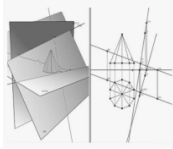
Coord. Esféricas a $\Rightarrow$ Cart. Rectang.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\beta = \arcsin \frac{z}{\rho}$$

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x}$$

Cart. Rectang. a $\Rightarrow$ Coord. Esféricas



EJERCICIOS DE APLICACION

Distancia entre dos Puntos

1. En un sistema de coordenadas Unidimensional, hallar la distancia entre los puntos A y B conocidas sus coordenadas A (3) ; B(-2). Graficar.

Respuesta

$$|BA| = |(x_2 - x_1)| = |(-2 - 3)| = |-5| = 5$$

$$|(x_1 - x_2)| = |(3 - (-2))| = 5$$

2. En un sistema de coordenadas Unidimensional, hallar la distancia entre los puntos A y B conocidas sus coordenadas A (7) ; B(5/2). Graficar.

Respuesta

$$|BA| = |-9/2| = 4.5$$

3. En un sistema de coordenadas Bidimensional, hallar la distancia entre los puntos P₁ (7:3) y P₂ (4: -1). Graficar.

Respuesta

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(4 - 7)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

4. En un sistema de coordenadas Bidimensional, hallar la distancia entre los puntos P₁ (-2: 3) y P₂ (5:1). Graficar.

Respuesta

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} =$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{53} = 7.28$$

Demostrar que los puntos A (3:8) B (-11: 3) y C (-8: -2), son los vértices de un triángulo isósceles. Graficar

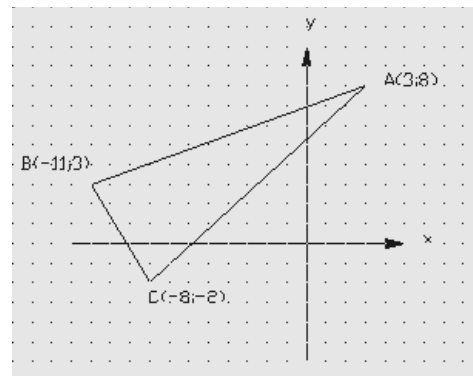
Respuesta:

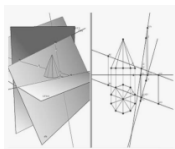
$$|AB| = 14.87$$

$$|BC| = 5.83$$

$$|AC| = 14.87$$

$|AB| = |AC|$ por lo tanto A,B,C son vértices de un triángulo isósceles.





Paso de Coordenadas Cartesianas a Polares y viceversa.

5- Hallar las Coordenadas Cartesianas del Punto A cuyas Coordenadas Polares son $\rho = 4$ y $\alpha = 120^\circ$. Graficar.

Respuesta: $x = -2$
 $y = 3,46$

6- Hallar las Coordenadas Polares del Punto P cuyas **Coordenadas Rectangulares** son (3; -5). Graficar.

Respuesta: $\rho = 5,83$
 $\alpha = 300^\circ 57'49,5''$

7- Dadas las Coordenadas Polares de los vértices del triángulo ABC. Determinar las Coordenadas Cartesianas de los mismos.

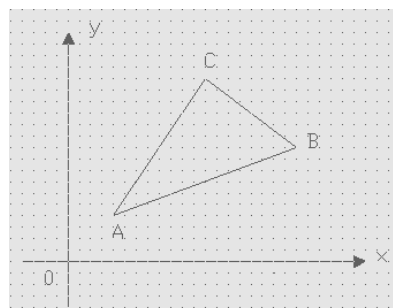
A (2,83; 45°) B (10; $53,13^\circ$) C (11,18; $26,56^\circ$)

Calcular además, aplicando la fórmula de Herón el Área de la figura.

Respuesta: A (2 ; 2) B (6 ;8) C (10 ; 5)

AB = 7,21 BC = 5 AC = 8,54

Área = 18 m²



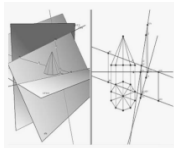
Sistema de Coordenadas en el Espacio

8a - Representar el siguiente punto y hallar sus distancias al origen y a los ejes coordenados A (6 ; 2 ; 3).

Respuesta: OA = 7
d1 al eje x =3,60
d2 al eje y =6,71
d3 al eje z =6,32

8b - En este caso el punto A tiene coordenadas (8 ; -2 ; 4), proceda de igual modo que en el ejercicio anterior.

Respuesta: OA = 9,16
d1 al eje x = 4,47
d2 al eje y = 8,94
d3 al eje z = 8,25



Geometría Analítica

Sistema de Coordenadas

20

9- Hallar los cosenos directores y los ángulos de dirección de la recta que une el origen con el punto P (-6 ; 2 ; 3).

Respuesta: $OP = 7$

$$\cos \alpha = -0,8571428 \rightarrow \alpha = 148^\circ 59' 50,2''$$

$$\cos \beta = 0,2857142 \rightarrow \beta = 73^\circ 23' 54''$$

$$\cos \gamma = 0,4285714 \rightarrow \gamma = 64^\circ 37' 23''$$

10- Conocidos las Coord. Polares del punto C (7; $73^\circ 23' 24''$; $115^\circ 23'$; 31°), determine cuáles son sus Coordenadas Cartesianas.

Respuesta: C (2; -3; 6)

11- Hallar las Coordenadas Polares, Cilíndricas y Esféricas del punto cuyas Coordenadas Rectangulares son P (1; -2; 2).

Respuesta: Coord. Polares P (3 ; $70^\circ 31' 43,61''$; $131^\circ 49'$; $48^\circ 11' 22,87''$)

Coord. Cilíndricas P (2,24; $-63^\circ 26' 5,82''$; 2)

Coord. Esféricas P (3; $-63^\circ 26' 5,82''$; $41^\circ 48' 37,14''$)

12- Hallar las Coordenadas Rectangulares, Polares y Esféricas del Punto A cuyas Coordenadas Cilíndricas son (6; 120° ; 4).

Respuesta: Coord. Rectangulares. A (-3; 5,196; 4)

Coord. Polares. A (7,21; $114^\circ 35' 2,01''$; $43^\circ 53' 58,68''$; $56^\circ 18' 35,76''$)

Coord. Esféricas. A (7,21; 120° ; $33^\circ 41' 24,25''$)

13- Dado un cubo cuya arista mide 3 cm de largo; y siendo AB paralela al eje x. Se pide calcular las Coordenadas Cilíndricas del vértice G y Coordenadas Esféricas del vértice H, cuando las Coordenadas Cilíndricas del vértice B son (6 ; 30° ; 2).

Respuesta: G (7,93; $49^\circ 6' 24,8''$; 5)

H (8, 11; $69^\circ 53' 47''$; $38^\circ 2' 43, 8''$)

