

Después de haber iniciado el estudio de los diferentes Sistemas de Coordenadas en tres dimensiones, del punto y la recta en el espacio, siguiendo con nuestro método de análisis abordaremos el estudio de las figuras en el espacio. En consecuencia y tal como mencionáramos anteriormente, en la Geometría Analítica del espacio, las relaciones y propiedades geométricas, se expresan mediante ecuaciones que contienen por lo general tres variables. En nuestro curso solo estudiaremos las superficies en el espacio, las que se representan analíticamente por medio de una sola ecuación, a diferencia de las curvas en el espacio que analíticamente se representan por medio de dos ecuaciones rectangulares independientes.

A lo largo de la historia, el uso de formas geométricas en las obras de arquitectura ha estado vinculada siempre a los principios estructurales que la resolvían. El empleo de la forma tridimensional de la arquitectura, ha tenido su mayor juego de posibilidades en dos propósitos constructivos: el reto de la cubrición de los espacios grandes y el levantamiento de altas torres, desde las cabañas a los estadios y desde las catedrales a los silos o desde faros hasta minaretes. El avance de la tecnología en general, la evolución de las técnicas constructivas hicieron posibles nuevas formas estructurales y con ellas la posibilidad de incursionar en nuevas formas geométricas.

El objetivo planteado en el momento de estudiar las figuras en el espacio es inducir al alumno en la búsqueda y manejo de la forma, desde lo conceptual, sin desconocer las leyes y relaciones matemáticas que la definen, pensando en la forma como un elemento primordial con el que se logre imaginar y materializar una composición espacial.

Concentraremos nuestra atención en el estudio de las superficies, unidad básica con la que se componen las formas, partiendo de una clasificación general que se basa en el grado de dificultad constructiva que las mismas presentan al momento de materializarlas y que es en definitiva lo que interesa a la Arquitectura.

Superficie

Definiremos a la Superficie como una figura geométrica determinada por 2 dimensiones.

Si estas dimensiones son largo y ancho, el ejemplo mas simple que se nos presenta luego de esta definición es por supuesto el plano.

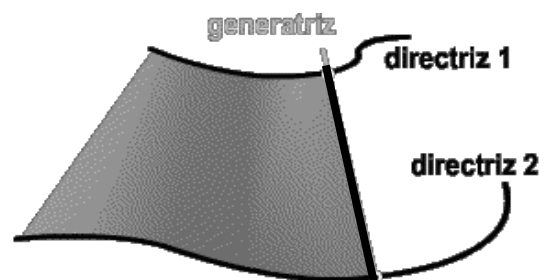
Pero también podemos definir

Superficie: generada por el movimiento de una línea (generatriz) a lo largo de una trayectoria (directriz)

Que es una generatriz: es una línea o una superficie que al moverse determina una superficie o un cuerpo.

Que es una directriz: es un ente que orienta o provoca una dirección.

En general es una línea sobre la que se sustenta otra para generar una superficie.



Superficie: analíticamente se llama superficie al conjunto de puntos P de coordenadas x; y; z en el espacio y solamente de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una sola ecuación de la forma

$$F(x; y; z) = 0$$

Podemos clasificar a las superficies en dos grandes Grupos; **REGLADAS y NO REGLADAS o curvas.**

REGLADAS: Una gran cantidad de superficies son generadas por una familia de rectas, a este tipo de superficies se les llama superficies regladas. Dentro de este tipo de superficies se encuentran el plano, y las superficies cónicas y los cilíndricas.

Regladas: **(GENERATRIZ RECTA)** Una superficie reglada es aquella que puede ser engendrada por el movimiento de una línea recta.

La línea recta en movimiento en cualquiera de sus posiciones, se llama generatriz de la superficie.

El mundo de las superficies regladas, generadas por el movimiento en el espacio de una recta es muy amplio. A partir de parejas de curvas con puntos correspondientes entre los cuales se apoyan las rectas hay infinitas posibilidades creativas.

Podemos clasificar a las superficies regladas en **Desarrollables y Alabeadas**

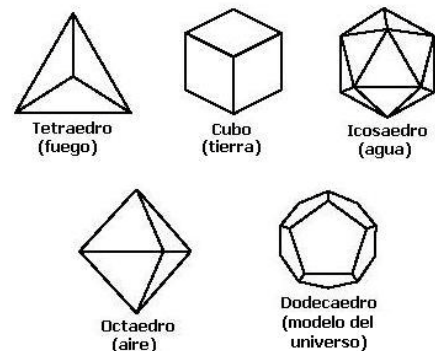
Las superficies desarrollables son superficies como un cono, un cilindro o una helicoides que tienen un plano tangente único a lo largo de cada generatriz y por tanto admiten un “desarrollo plano”, pudiéndose montar pues a partir de porciones planas

Forman parte de esta familia de superficies los **poliedros convexos y las radiadas**

Poliedros convexos: formada por caras planas. Toda la superficie queda a un lado de cualquier cara que se prolongue indefinidamente

Recordemos que los poliedros (cuerpos geométricos limitados por polígonos) se caracterizan por tener todas sus superficies planas. Solo hay 5 poliedros regulares (caras iguales) Cubo o hexaedro -6 caras, tetraedro 4 caras, octaedro 8 caras, dodecaedro 12 caras- y el icosaedro 20 caras. Los que no cumplen esta condición forman los poliedros irregulares.

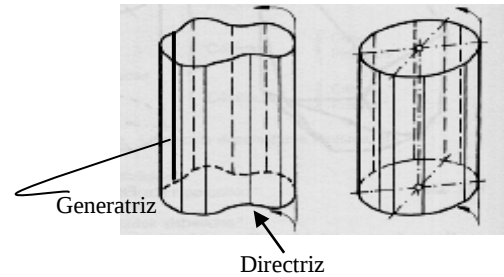
Las superficies planas que pueden construirse a partir de planos doblados o plegados se adaptan bien a los procesos constructivos. Son las mas sencillas adecuadas a la fabricación de piezas seriadas



Para que una superficie curva sea desarrollable es necesario que sus generatrices se corten en un punto o que sean paralelas. Estas condiciones nos llevan a definir otras superficies regladas → **las superficies radiadas** que se clasifican en superficies **cónicas y cilíndricas**

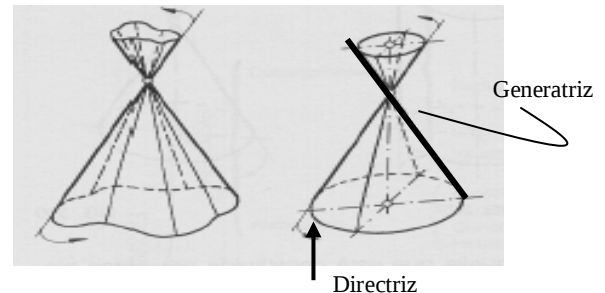
Superficie cilíndrica

Una superficie cilíndrica es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas



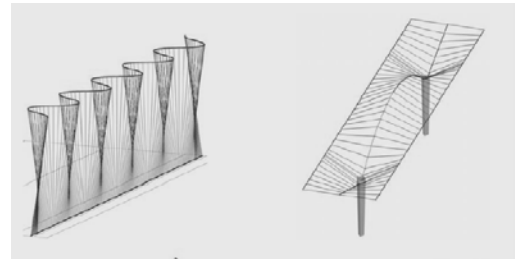
Superficie cónica

Se llama superficie cónica a la engendrada por una línea recta que se mueve de tal manera que pasa siempre por una curva fija y por un punto fijo, no contenido en el plano de esa curva



Superficies Alabeadas: Superficie generada por una línea que cambia continuamente de dirección en los tres sentidos de sus dimensiones.

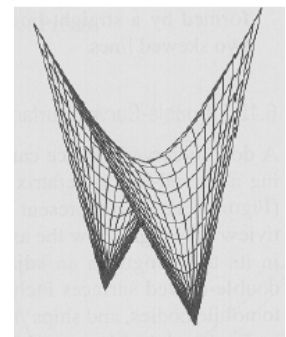
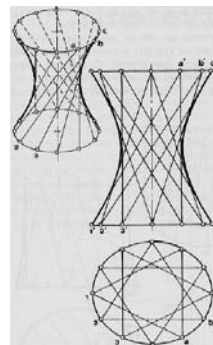
Superficies regladas en la que cada dos rectas generatrices contiguas se cruzan en el espacio. Su desarrollo no se adapta a un plano. Geométricamente las superficies alabeadas son aquellas que tienen doble curvatura de manera tal que dos secciones perpendiculares por alguno de sus puntos producen líneas cuyas curvaturas son de sentidos opuestos.



HIPERBOLOIDE REGLADO O DE UNA HOJA

Generado por una recta que gira alrededor de un eje en el espacio.

Superficie generada por el conjunto de rectas que se apoyan en tres rectas que se cruzan (directrices de la superficie alabeada)

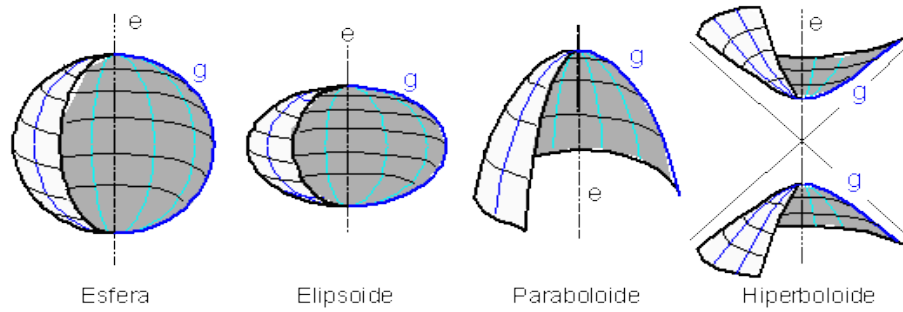


PARABOLOIDE HIPERBÓLICO: Generado por una recta que se desplaza paralela a un plano director, y apoyándose en dos rectas que se cruzan.

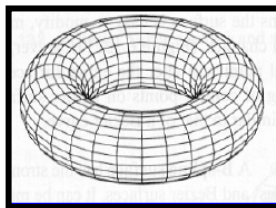
NO REGLADAS: en general son superficies de generatriz curva. Se subdividen en **Superficies de Segundo grado – cuádricas, de Revolución y otras.**

De segundo grado - cuádricas : Estas superficies se caracterizan porque sus generatrices y directrices son curvas de 2do grado.

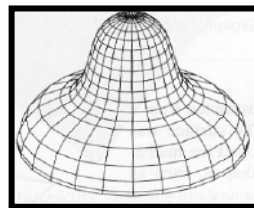
Las Cuádricas de revolución son las superficies que tienen por generatriz a una cónica y por eje de rotación a la recta que contiene a un eje de esa cónica. Ej: Esfera, elipsoide, paraboloides, hiperboloide de revolución



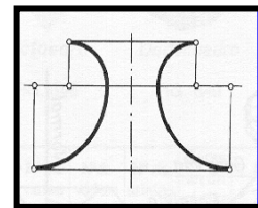
De revolución: son aquellas superficies que son engendradas por la rotación de una curva plana en torno a una recta fija contenida en el mismo plano de la curva (directriz circular)



Toro de revolución



Forma de revolución

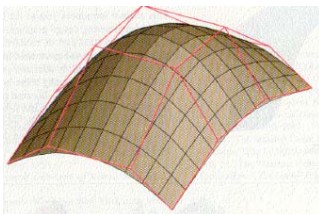


Escocia

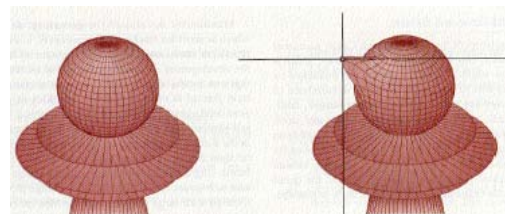
Podemos referirnos a las superficies no regladas o curvas cuando hablamos de aquellas superficies de gran interés en la arquitectura. Son las superficies cóncavas. Estas superficies tienen la particularidad de tener derecho y revés. De hecho que podemos hablar de superficie cóncava y convexa según desde lado que las observemos. Aunque constructivamente presentan un nivel de complejidad obviamente mayor que las superficies planas, estas formas, derecho y revés de las superficies, permiten explotar tales propiedades en cuanto a la estabilidad estructural, en acústica en la reflexión de la luz y aun para la recogida del agua de lluvia.



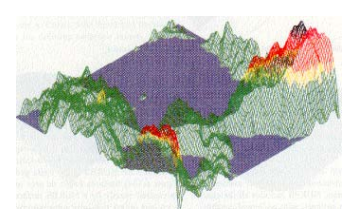
Otras formas de superficies son las llamadas superficies libres. Ej de las mismas son:



Superficies de Bezier



Superficie B-Spline



Superficie - Fractal

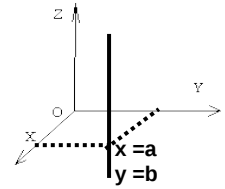
Determinación de las figuras en el espacio

Las coordenadas del espacio, así como las del plano dan la posibilidad de expresar mediante números y relaciones numéricas, además de los puntos y las líneas también las superficies y otros conjuntos de puntos.

Veamos por ejemplo que conjuntos de puntos se obtiene si se dan solo dos coordenadas y se supone la tercera arbitraria.

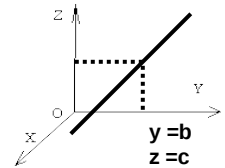
Las condiciones $x = a$ $y = b$ donde a y b son números dados.

($a = 5$ y $b = 4$) determinan en el espacio una recta paralela al eje z .

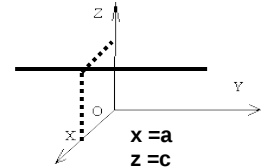


Todos los puntos de esta recta tienen una misma abscisa y una misma ordenada. La coordenada z puede tomar cualquier valor arbitrario

De la misma manera las condiciones $y = b$ y $z = c$ determinan una recta paralela al eje x . Todos los puntos de esta recta tienen la misma ordenada y cota z . La coordenada x puede tomar cualquier valor.



Y las condiciones $x = a$ $z = c$ determinan una recta paralela al eje y . Todos los puntos de esta recta tienen la misma abscisa y cota z . La coordenada y puede tomar cualquier valor



Como se expresan analíticamente las superficies

Definíamos analíticamente a una superficie como al conjunto de puntos P de coordenadas x ; y ; z en el espacio y solamente de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfacen una sola ecuación de la forma

$$F(x; y; z) = 0$$

El Plano

Vimos que la ecuación de primer grado en x e y : **$Ax + By + C = 0$** Representa una recta en el plano.

En forma análoga la ecuación de primer grado en x , y , y z **$Ax + By + Cz + D = 0$** Representa un plano

Todo plano es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyas coordenadas cartesianas satisfacen a una ecuación de la forma

$Ax + By + Cz + D = 0$

No siendo A , B y C nulos a la vez

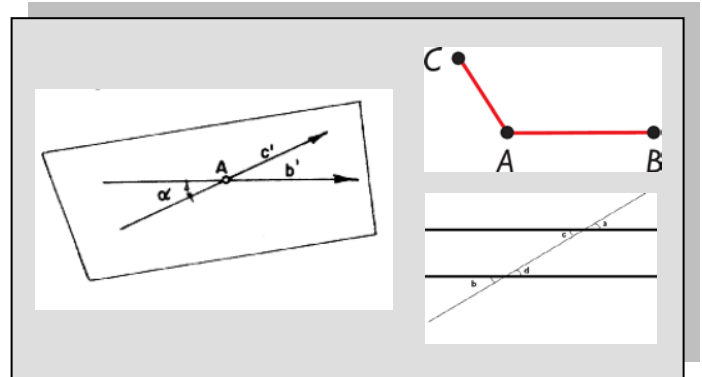
Un plano se representa por una ecuación lineal o de primer grado en las variables x , y y z . El recíproco también es cierto, toda ecuación lineal en x, y, z representa un plano.

Recordemos que el plano en Geometría es uno de los entes geométricos fundamentales junto con el punto y la recta. Que posee dos dimensiones y contiene infinitos [puntos](#) y [rectas](#). Para describirlo hay que hacerlo en relación a otros elementos geométricos similares y apoyándose en los [postulados característicos](#), que determinan las relaciones entre los mismos.

Un plano queda definido por los siguientes elementos geométricos:

- Tres puntos no alineados.
- Una recta y un punto exterior a ella.
- Dos rectas paralelas
- Dos rectas que se cortan.

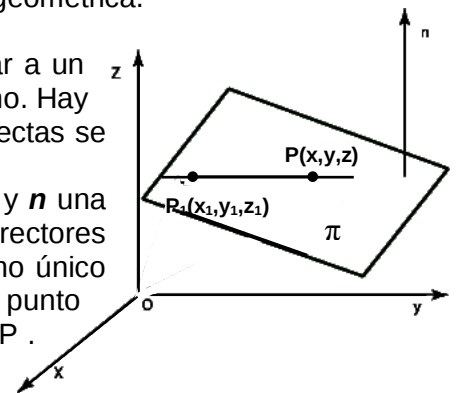
Los planos suelen nombrarse con una letra del alfabeto griego.



Las diferentes maneras enunciadas permiten deducir la ecuación del plano. Vamos a obtener la ecuación del plano partiendo de sus bien definidas propiedades geométrica.

En geometría elemental, se dice que una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a cualquier recta contenida en ese plano. Hay infinitas rectas perpendiculares a un plano. Cada una de tales rectas se llama normal al plano.

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto fijo cualquiera perteneciente plano π y $\mathbf{n}$ una recta fija cualquiera en el espacio. Sean $[A; B; C]$ los números directores de $\mathbf{n}$ (componentes de $\mathbf{n}$). Queremos hallar la ecuación del plano único que pasa por P_1 y es perpendicular a $\mathbf{n}$. Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera perteneciente al plano y $\mathbf{l}$ la recta que pasa por P_1 y P . Entonces $\mathbf{l}$ y $\mathbf{n}$ son perpendiculares entre si.



Recordemos que si $[a, b, c]$ son los números directores de una recta, sus cosenos directores son

$$\cos \alpha = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \cos \beta = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \cos \gamma = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Y un sistema de números directores para la recta que une dos puntos $Q(x_1, y_1, z_1)$ y $R(x_2, y_2, z_2)$ esta dada por

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Además el ángulo θ formado por dos rectas cualesquiera dirigidas en el espacio cuyos números directores son $[a_1, b_1, c_1]$ y $[a_2, b_2, c_2]$ se determina por la relación

$$\cos \theta = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$$\cos \theta = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{|\mathbf{d}_1| |\mathbf{d}_2|}$$

Para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus números directores correspondientes sea igual a cero.

Los números directores de la recta $\mathbf{l}$ contenida en el plano y que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P(x, y, z)$ son $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$

Y los números directores de la recta n $[A;B;C]$

Por lo tanto para que ambas rectas cumplan la condición de perpendicularidad debe verificarse

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (1)$$

Esta es la condición que debe satisfacer cualquier punto del plano.

La expresión (1) puede escribirse

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0 \quad (2)$$

Como la expresión encerrada entre paréntesis $(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$ es una constante puede reemplazarse por el término constante $-D$

De manera tal que la ecuación (2) toma la forma $Ax + By + Cz + D = 0$

Y como todo punto contenido en el plano puede determinar con el punto fijo $P(x, y, z)$ una recta que es perpendicular a la recta n , por lo que sus coordenadas también deben satisfacer la ecuación (2) y por ende la (1) decimos que $Ax + By + Cz + D = 0$

Es la ecuación general de un plano en donde A, B, C y D son constantes, por lo menos uno de los tres coeficientes es distinto de 0, y cuya normal tiene por números directores $[A, B, C]$.

A, B, C son las componentes de la normal al plano y por lo tanto a todas las rectas contenidas en el.

Son ejemplos de ecuaciones de planos $2x - 3y + z + 1 = 0$ $x + y - 2z + 2 = 0$

Forma segmentaria de la ecuación del Plano

Si los puntos de intersección de un plano con los ejes coordenados son a, b y c la ecuación toma la forma segmentaria:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

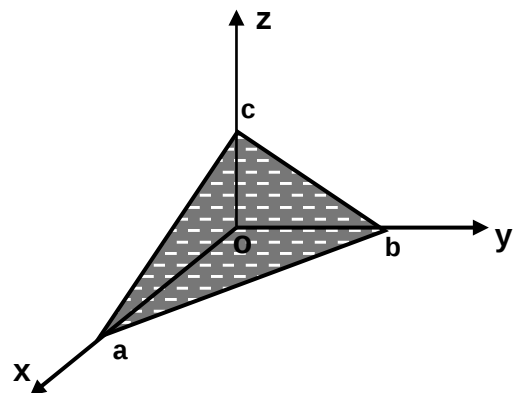
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + Cz = -D$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = \frac{-D}{-D}$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Posiciones Particulares del Plano con respecto a los ejes y planos coordenados

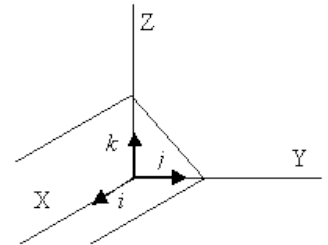
Al establecer la ecuación del plano $Ax + By + Cz + D = 0$ imponíamos la condición de que A , B y C no fueran nulos a la vez. Se pueden considerar varios casos particulares según que uno o dos de los coeficientes de la ecuación sean nulos.

- a) Cada uno de ellos separadamente
- b) El termino independiente
- c) Cada uno de ellos y el termino Independiente
- d) Dos de ellos separadamente
- e) Dos de ellos separadamente y el termino independiente.

a)

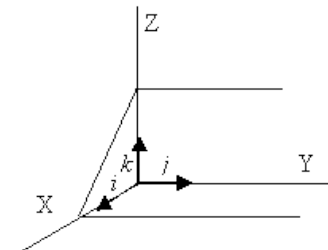
Plano paralelo al eje OX. Se tiene $A = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$By + Cz + D = 0$$



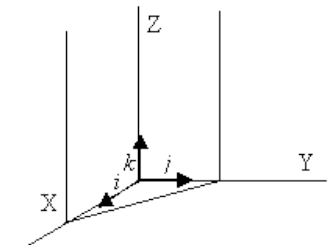
Plano paralelo al eje OY. Se tiene $B = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$Ax + Cz + D = 0$$



Plano paralelo al eje OZ. Se tiene $C = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$Ax + By + D = 0$$



b)

Plano que pasa por el origen. Se tiene $D = 0$ la ecuación general toma la forma:

$$Ax + By + Cz = 0$$

c)

Si $A = 0$ y $D = 0$ la ecuación general toma la forma: $By + Cz = 0$

Que es la ecuación de un plano que contiene al eje X porque al ser $A = 0$ el plano es paralelo a OX y por ser $D = 0$ pasa por el origen, por lo tanto el eje OX pertenece al plano

Si $B = 0$ y $D = 0$ la ecuación general toma la forma: $Ax + Cz = 0$

Que es la ecuación de un plano que contiene al eje y porque al ser $B = 0$ el plano es paralelo a OY y por ser $D = 0$ pasa por el origen, por lo tanto el eje OY pertenece al plano

Si $C = 0$ y $D = 0$ la ecuación general toma la forma: $Ax + By = 0$

Que es la ecuación de un plano que contiene al eje z porque al ser $C = 0$ el plano es paralelo a

OZ y por ser $D = 0$ pasa por el origen, por lo tanto el eje OZ pertenece al plano

La condición necesaria y suficiente para que un plano contenga a un eje coordenado es que en su ecuación falte el término de la variable homónima de ese eje y el término independiente

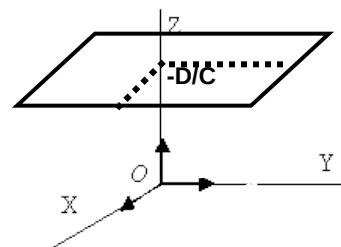
d)

Plano paralelo al plano XOY. Se tiene en este caso $A = 0$, $B = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$Cz + D = 0$$

de donde $z = -\frac{D}{C}$ constante

Lugar de todos los puntos de cota constante, o sea plano paralelo al XOY que pasa por el punto del eje OZ de cota $-D/C$



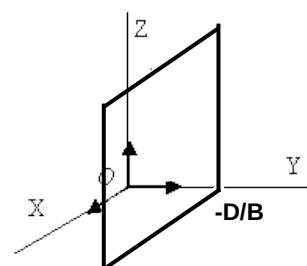
e)

Plano paralelo al plano XOZ. Se tiene en este caso $A = 0$, $C = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$By + D = 0$$

de donde $y = -\frac{D}{B}$ constante

Lugar de todos los puntos de y constante, o sea plano paralelo al XOZ que pasa por el punto del eje OY para $y = -D/B$

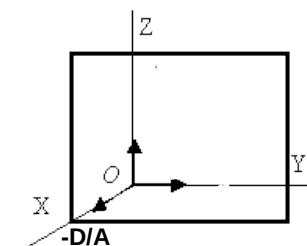


f)

Plano paralelo al plano YOZ. Se tiene en este caso $B = 0$, $C = 0$ y la ecuación general toma la forma:

$$Ax + D = 0$$

de donde $x = -\frac{D}{A}$ constante



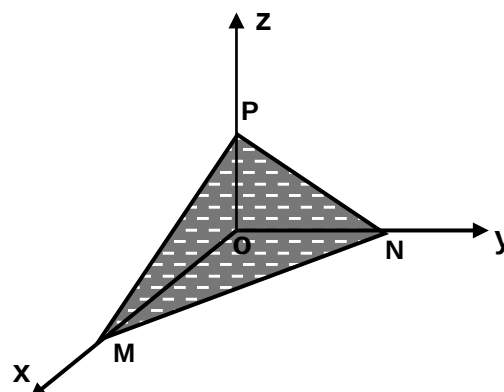
La condición necesaria y suficiente para que un plano sea paralelo a uno de los planos coordenados es que sean nulos los coeficientes de los términos de su ecuación que contiene a las variables homónimas a los ejes pertenecientes a ese plano, vale decir que falten esos términos.

Caso Particular

$A \neq 0$ $B \neq 0$ $C \neq 0$ $D \neq 0$

El plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ corta a los ejes coordenados en puntos distintos del origen.

Para obtener las coordenadas del punto M, un punto del plano que corta al eje OX, se tiene en cuenta que:



Por pertenecer M al eje OX, su ordenada **y** su cota **z** son nulas y por ser M un punto perteneciente al plano π sus coordenadas $x = \text{medida OM}$, $y = 0$ y $z = 0$ deben satisfacer a su ecuación.

Luego resulta

$$A \text{ medidaOM} + B y + C z + D = 0$$

La medida de OM será $OM = \frac{-D}{A} = a$ llamada **abscisa al origen del plano**

Análogamente

Por ser N un punto perteneciente al eje **OY** su abscisa y cota **z** son nulas y por ser N perteneciente al plano π sus coordenadas $x = 0$, ordenada $y = \text{medid de ON}$ y cota $z = 0$ deben satisfacer a su ecuación.

$$A x + B \text{ medidaON} + C z + D = 0$$

La medida ON será $ON = \frac{-D}{B} = b$ llamada **ordenada al origen del plano**

Finalmente el punto P perteneciente al eje OZ de abscisa y ordenada nulas, por ser perteneciente al plano π sus coordenadas $x = 0$, su ordenada $y = 0$ y su cota $z = \text{medida de OP}$ deben satisfacer la ecuación.

$$A x + B y + C \text{ medidaOP} + D = 0$$

La medida de OP será

$$OP = \frac{-D}{C} = c \text{ llamada } \mathbf{cota \text{ al origen del plano}}$$

Una de las partes más interesantes de la Geometría Analítica es la construcción de figuras a partir de sus ecuaciones. **La construcción de una superficie se torna más fácil** mediante la determinación de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus trazas sobre los planos coordenados.

Recibe el nombre de **intercepción de una superficie** sobre un eje coordenado a la coordenada correspondiente del punto de intersección de la superficie con el eje coordenado.

La traza de una superficie sobre un plano coordenado es la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.

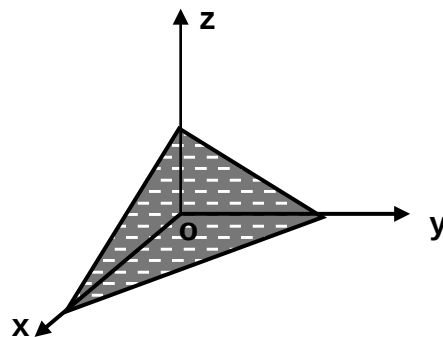
En el caso particular de la superficie que llamamos *Plano* las trazas sobre los planos coordenados, son las rectas determinadas por el plano dado con cada uno de los planos coordenados.

- Se calcula en el plano xy haciendo $z = 0$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda

$$Ax + By + D = 0 \text{ ecuación general de la recta en el plano coordenado xy}$$



- Se calcula en el plano xz haciendo $y = 0$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda

$Ax + Cz + D = 0$ ecuación general de la recta en el plano coordenado xz

- Se calcula en el plano yz haciendo $x = 0$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda

$By + Cz + D = 0$ ecuación general de la recta en el plano coordenado yz

Ejemplo: Hallar las trazas sobre los planos coordenados xy, xz e yz del plano de ecuación

$$2x + 4y + 3z = 4$$

Determinamos los puntos en que dicho plano corta a cada uno de los ejes coordenados y representamos las rectas correspondientes como intersección de dos planos: el plano dado y cada uno de los planos coordenados.

- En el plano xy $\Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow 2x + 4y - 4 = 0$

Ecuación general de la recta en el plano coordenado xy

Para trazar la línea recta, calculamos los puntos de intersección sobre los dos ejes por los que pasa el plano coordenado xy.

$$2x + 4y - 4 = 0$$

Intersección con el eje x $\Rightarrow y = 0$

$$x = 2$$

Intersección con el eje y $\Rightarrow x = 0$

$$y = 1$$

Las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes x e y serán (2, 0, 0) y (0, 1, 0)

- En el plano xz $\Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow 2x + 3z - 4 = 0$

Ecuación general de la recta en el plano coordenado xz

Calculamos los puntos de intersección sobre los ejes x y z

$$2x + 3z - 4 = 0$$

Intersección con el eje $x \Rightarrow z = 0$

$$x = 2$$

Intersección con el eje $z \Rightarrow x = 0$

$$z = 4/3$$

Las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes x y z serán $(2,0,0)$ y $(0,0,4/3)$

- En el plano $yz \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow 4y + 3z - 4 = 0$

Ecuación general de la recta en el plano coordenado yz

Calculamos los puntos de intersección sobre los ejes y y z

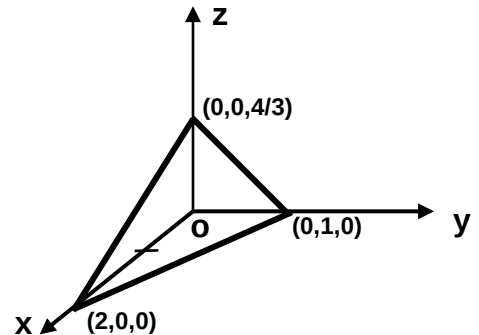
$$4y + 3z - 4 = 0$$

Intersección con el eje $y \Rightarrow z = 0$

$$y = 1$$

Intersección con el eje $z \Rightarrow y = 0$

$$z = 4/3$$



Las coordenadas de los puntos de intersección con los ejes y y z serán $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 4/3)$

Graficamos en un sistema coordenado cartesiano 3D

Distancia del origen a un Plano:

La medida de la distancia del origen de un sistema cartesiano ortogonal a un plano, es igual al valor absoluto del cociente de su término independiente por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes de las variables.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad d = \left| \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

$$4x - 12y + 3z - 39 = 0$$

Ejemplo: Hallar la distancia del origen al plano

$$d = \left| \frac{-39}{\sqrt{4^2 + (-12)^2 + 3^2}} \right| = d = \left| \frac{-39}{\sqrt{16 + 144 + 9}} \right| = d = \left| \frac{-39}{13} \right| = 3$$

Distancia de un punto a un Plano:

La medida de la distancia de un punto al plano es igual a valor absoluto del valor numérico que se obtiene al reemplazar las variables de la ecuación del plano por sus valores particulares del punto y divididos por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes de las variables.

$$P(x_1; y_1; z_1) \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

Ejemplo: Hallar la distancia del punto $P(-1; 2; 3)$ al plano $4x - 2y - 0,5z - 4 = 0$

$$d = \left| \frac{4(-1) + (-2)(2) + (-0,5)(3) + (-4)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-0,5)^2}} \right| = d = \left| \frac{-4 - 4 - 1,5 - 4}{\sqrt{16 + 4 + 0,25}} \right| = d = \left| \frac{-13,5}{4,5} \right| = 3$$

Cuádricas

Para facilitar la construcción de una superficie, además de la determinación de sus puntos de intersección con los ejes coordenados y de sus trazas sobre los planos coordenados, podemos discutir otros pasos como son:

- Simetría con respecto a los planos coordenados, ejes coordenados y origen
- Secciones por planos paralelos a los planos coordenados
- Extensión de la superficie

Ecuación general de segundo grado con tres variables.

Definición: Una cuádrica es el lugar geométrico de los puntos del espacio (x,y,z) que verifican una ecuación de segundo grado del tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1)$$

en donde uno por los menos de los seis coeficientes $A, B, C, D, E,$ y F es diferente de 0 .

En general las superficies cuyas ecuaciones sean de segundo grado como son las ecuaciones de la superficie cilíndrica, esférica y cónica también se llaman cuádricas. También cualquier superficie reglada representada por una ecuación de segundo grado se llama cuádrica reglada.

La ecuación general de una general de una cuádrica (1) ocupa entre las superficies, en Geometría Analítica del espacio, un lugar análogo al ocupado entre las curvas planas, en geometría analítica plana por la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que es la definición analítica de una sección cónica

Se demuestra en tratados avanzados que mediante una apropiada transformación de coordenadas se puede transformar la ecuación (1) de manera que tome una de las dos formas que se muestran

- **Cuádricas con centro** $Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R$ que representan a las superficies que tienen un centro de simetría, el origen.
- **Cuádricas sin centro** $Mx^2 + Ny^2 = Sz$ no tienen centro de simetría.

Cuádricas con centro

Vamos a considerar las Cuádricas con centro representadas por la ecuación

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R \quad \text{en donde } M, N \text{ y } P \neq 0$$

Podemos escribir esta ecuación de la forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Elipsoide. Llamamos elipsoide a la superficie que en un sistema cartesiano de coordenadas se determina por la ecuación

Todos los coeficientes positivos.

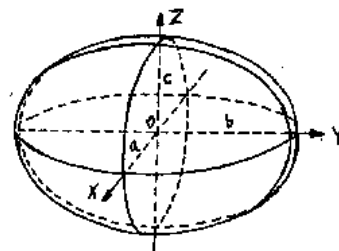
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Los seis puntos de intersección del elipsoide y los ejes coordenados son los vértices

Las secciones del elipsoide por planos paralelos a los planos coordenados son elipses.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos a los ejes coordenados y al origen.

En el caso particular de que alguno de los parámetros a, b, c se repita, las secciones elípticas se convierten en circunferencias y puede considerarse el elipsoide como engendrado por la rotación de la elipse alrededor de uno de los ejes. En este último caso el elipsoide se llama entonces de revolución.



Se denominan cuádricas redondas o de revolución a las superficies que tienen por generatriz a una cónica y por eje de rotación a la recta que contiene a un eje de esa cónica.

Haciendo girar la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Situada en el plano coordenado xz
Obtenemos un elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Si $a > c$ el elipsoide es aplastado
Si $a < c$ el elipsoide es alargado
Si $a = c$ el elipsoide es una esfera

Si coinciden los tres parámetros $a = b = c$, nos encontramos con el caso de una esfera.

Las trazas del elipsoide son elipses, es decir, la intersección con planos paralelos a los planos coordenados es una elipse

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ elipse}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ elipse}$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ elipse}$$

Hiperboloide de una hoja.- Llamamos hiperboloide de una hoja a la superficie que en un sistema de coordenadas cartesianas se determina por las ecuaciones canónicas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dos coeficientes positivos y uno negativo

Los parámetros a, b, c son los semiejes del hiperboloide de una hoja.

Las intersecciones con los ejes x e y son $\pm a$ y $\pm b$, respectivamente. No hay intersecciones con el eje z .

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos a los ejes coordenados y al origen. Si seccionamos la figura por planos paralelos al XOY, las secciones son elipses semejantes. La elipse determinada por el plano XOY es la menor de todas las posibles y recibe el nombre de **elipse de garganta**.

Si desarrollamos una sección por un plano que contenga al eje Z , se obtiene una hipérbola. En el caso de que coincidan dos de los parámetros, $a = b$, las secciones por planos paralelos al XOY son circunferencias con centro en el eje OZ. Podemos considerar en este caso que el hiperboloide está engendrado por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus ejes.

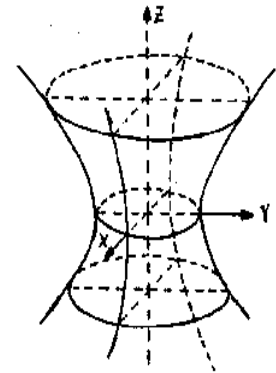
Si analizamos la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Las trazas del hiperboloide son hipérbolas en planos paralelos al plano XZ y al YZ, mientras que en planos paralelos al XY las trazas son elipses.

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ Hipérbola}$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ Hipérbola}$$

$$\text{Si } z = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ Elipse}$$



El eje por donde se abre el hiperboloide es por el eje cuya variable aparece en la ecuación negativa (en este caso eje z).

Hiperboloide de dos hojas. - llamamos hiperboloide de dos hojas a la superficie que en un sistema de coordenadas cartesianas se determina por la ecuación canónica:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Dos coeficientes negativos y 1 positivo que representa un hiperboloide de dos hojas sobre el eje Z . Al igual que el hiperboloide de 1 hoja hay otras dos formas canónicas de la ecuación, siendo la discusión de la ecuación (1) la más representativa.

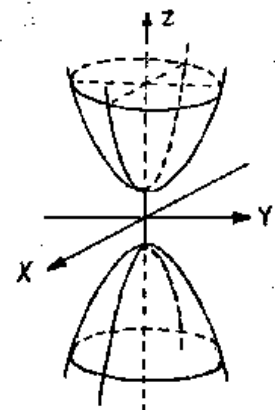
La superficie es simétrica con respecto a todos los planos a los ejes coordenados y al origen

Cuando el signo negativo antecede a cualquiera de los otros dos términos, el hiperboloide se encuentra sobre el eje coordenado que afecta.

Las trazas de esta superficie son:

Para planos paralelos a xz y a $yz \rightarrow$ hipérbolas

Para planos paralelos al plano coordenado $xy \rightarrow$ elipses



Para hallar las trazas sobre los planos coordenados xz e yz planteamos

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ hiperbola}$$

$$\text{si } y = 0 \Rightarrow \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ hiperbola}$$

No tiene traza en el plano coordenado xy. Sin embargo si consideramos planos paralelos al plano xy para $z = z_1 > c$ obtenemos las elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_1^2}{c^2} - 1$$

Cuádricas sin centro

Vamos a considerar las Cuádricas sin centro representadas por la ecuación $Mx^2 + Ny^2 = Sz$ en donde M, N y S $\neq 0$

Podemos escribir esta ecuación de la forma canónica

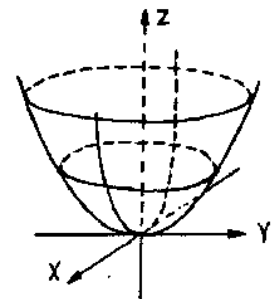
$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Las superficies Cuádricas sin centro tienen dos planos de simetría: los planos xz e yz, llamados planos principales. Un eje de simetría el eje z llamado eje principal, pero ningún centro de simetría. Son dos: **Paraboloide elíptico y el paraboloide hiperbólico.**

Paraboloide elíptico.- Llamamos paraboloide elíptico a la superficie que en un sistema de coordenadas cartesianas se determina por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

(Los dos coeficientes de igual signo)



las otras dos formas canónicas de la ecuación son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cx$$

El punto que coincide con el origen de coordenadas se llama vértice del paraboloide.

La superficie es simétrica con respecto a los planos xz e yz y al eje z.

Las secciones de las superficies por planos paralelos al plano xy son las elipses

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = ck, \quad z = k$$

Las secciones que se obtienen al cortar la figura por planos que contienen al eje OZ son parábolas y las que se obtienen al cortarla por planos que contengan al eje YO son elipses

Las trazas del paraboloide elíptico son:

Para planos paralelos al XY → elipses, para planos paralelos al XZ o al YZ → parábolas

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = cz \Rightarrow y^2 = b^2 cz \quad \text{parábola}$$

$$\text{Si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = cz \Rightarrow x^2 = a^2 cz \quad \text{parábola}$$

Llamamos paraboloide hiperbólico a la superficie que en un sistema rectangular de coordenadas se determina por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Los dos coeficientes de diferente signo

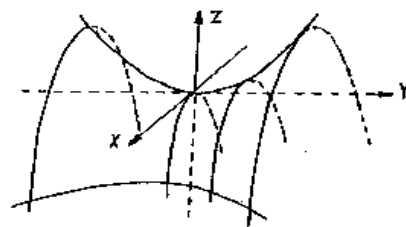
$$\text{Si } z = K \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck \quad \text{Elipse,} \quad \text{y si } a = b \quad \text{Círculo}$$

Las otras dos formas canónicas de la ecuación son

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cy \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cx$$

La superficie pasa por el origen y no hay otras intersecciones con los ejes coordenados. La superficie es simétrica con respecto a los planos xz e yz respectivamente y al eje z.

Las traza sobre los planos coordenados xy, xz e yz son respectivamente



$$\text{si } x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = -cz \quad \text{parábolas} \quad \text{si } y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = cz \quad \text{parábolas}$$

Las secciones de la superficie por planos paralelos a, pero no coincidente con el plano xy son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck, \quad z = k \neq 0$$

Evidentemente a medida que k crece numéricamente, las ramas de estas hipérbolas se alejan cada vez mas del eje z por lo tanto la superficie es abierta y se extiende indefinidamente.

Superficie Cilíndrica

Decíamos cuando clasificamos las superficies que una superficie cilíndrica es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas.

Cuando una de las variables x , y o z no aparece en la ecuación de la superficie, entonces la superficie es un Cilindro.

Por ejemplo:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Es un cilindro en el espacio ya que falta la variable z . Por lo tanto, la gráfica del cilindro se extenderá paralelo al eje z .

En base a esto entendemos que si se toma en el plano xy una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio igual a la unidad y por cada punto de esta circunferencia se traza una recta paralela al eje z obtendremos una superficie cilíndrica (de directriz circular).

¿Que conjuntos de puntos determina en el espacio la ecuación?

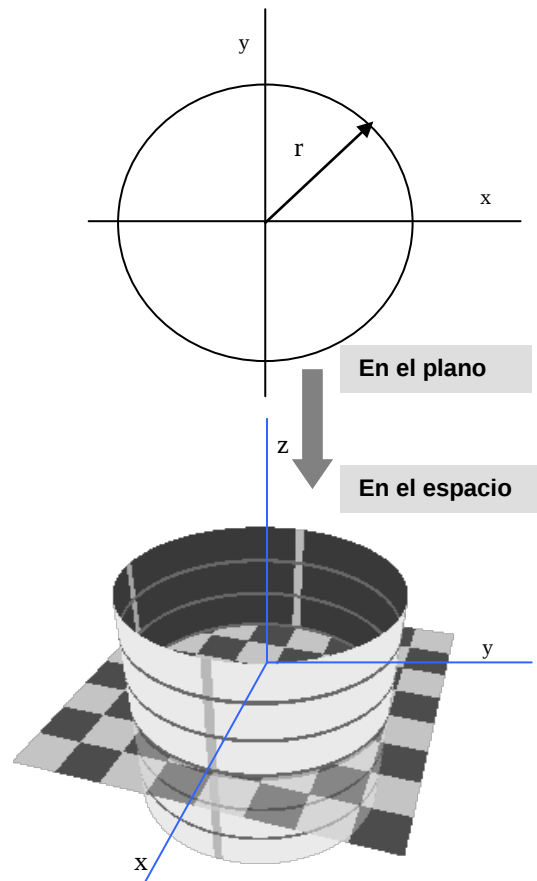
$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

Examinemos en primer lugar solamente los puntos de plano xy que satisfacen a esta relación, es decir los puntos para los cuales $z = 0$.

Así la ecuación (1) determina una circunferencia con centro en el origen del sistema de coordenadas y radio r igual a la unidad situados en el plano xy .

El punto $P(3/5;4/5;0)$ satisface a la ecuación. Pero también el punto $Q(3/5;4/5;10)$ y en general todos los puntos $Q(3/5;4/5;z)$ en los que el valor de la coordenada z es absolutamente arbitrario.

De esta manera podemos obtener de cada uno de los puntos $(x_1; y_1; 0)$ de la circunferencia que pertenece al plano xy , muchos puntos que satisfacen a la ecuación (1) Cada una de las rectas paralelas (generatrices) trazadas por cada punto de la circunferencia tendrán el mismo valor x e y variando arbitrariamente el valor de z , es decir estos puntos serán de la forma $(x_1; y_1; z)$

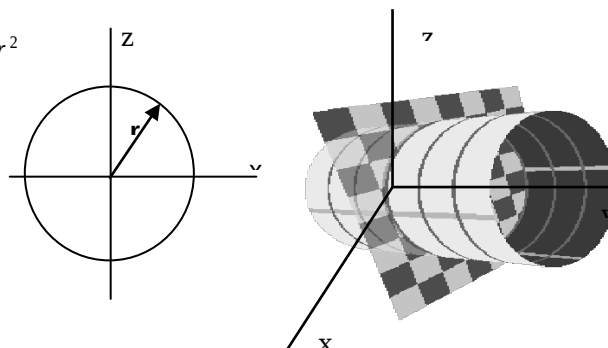


Cilindro circular recto con eje en el eje y :

Dada la ecuación:

$$x^2 + z^2 = r^2$$

Vemos en esta expresión que falta la variable y . Por lo tanto la superficie que se obtiene es un cilindro circular circunferencia (directriz) en el plano xz , de radio r y centro en el origen, con generatrices paralelas al eje y .



Si se considera la ecuación $x^2 + y = 0$, que corresponde a una parábola en el plano xy, al variar z se obtiene la superficie llamada **Cilindro parabólico**

Si la ecuación en el espacio es la de la elipse $y^2 + (4z^2) = 4$ en el plano yz, al recorrer el eje x se obtiene la superficie **del Cilindro elíptico**

Si la ecuación en el espacio es $y^2 - x^2 = 1$ que corresponde a una hipérbola centrada en (0,0) en el plano xy, al recorrer z se obtiene la superficie **Cilindro hiperbólico**

Grafique estas superficies con ayuda de software matemático.

Superficie Esférica

Veamos otros ejemplos que muestran como se pueden expresar en el espacio diferentes conjuntos por medio de ecuaciones y otras relaciones entre las coordenadas.

1. Sea la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (1)

Como la formula $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ expresa la distancia entre el punto (x,y,z) y el origen de coordenadas, al traducir al lenguaje geométrico la relación (1) significa que el punto de coordenadas que satisface a esta relación (x, y, z) se encuentra a la distancia r del origen de las coordenadas

Por consiguiente el conjunto de todos los puntos para los cuales se cumple la relación (1) es la superficie de la esfera con centro en el origen del sistema de coordenadas y radio r.

La superficie esférica de centro C(a, b, c) y radio r es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyas coordenadas cartesianas ortogonales satisfacen la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Esfera es el lugar geométrico de los puntos en el espacio cuyas coordenadas cartesianas ortogonales satisfacen la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq r^2$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la superficie esférica de centro C(2,3,4) y radio r=5

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 5^2$$

Cuádricas degenerada:

Una cuádrica se llama degenerada cuando tiene por lo menos un punto singular. Un punto singular de una cuádrica es aquél para el que se anulan todos los coeficientes de la ecuación del plano tangente en dicho punto. Se tiene que si se anulan los coeficientes, toda recta que pase por dicho punto es tangente y, por lo tanto, no se puede hablar de plano tangente en dicho punto. Una cuádrica degenerada pertenece, según tenga un punto singular propio o impropio a uno u otro (o ambos) de los dos tipos siguientes:

Llamamos cono cuádrico o cono de segundo orden a la superficie que en un sistema de coordenadas cartesianas se determina por cualquiera de las ecuaciones:

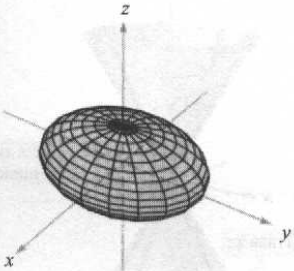
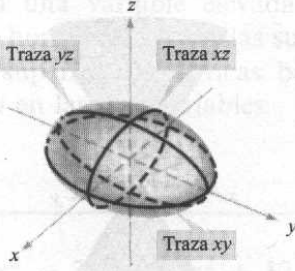
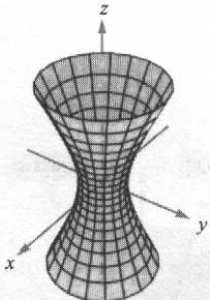
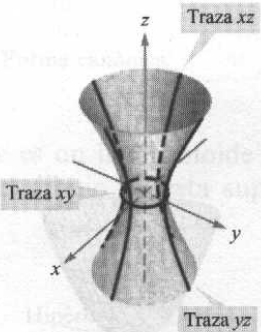
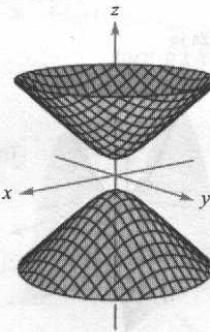
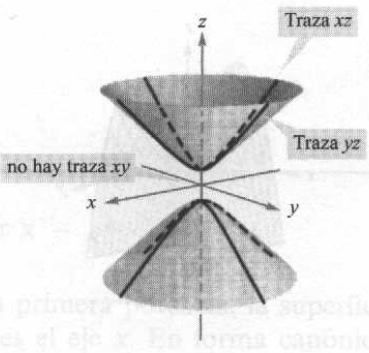
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad ; \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

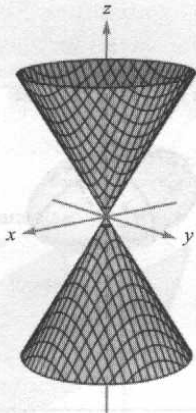
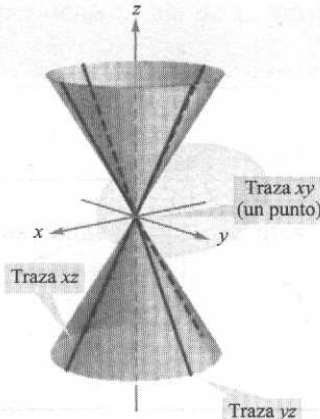
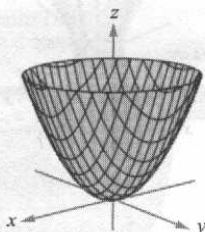
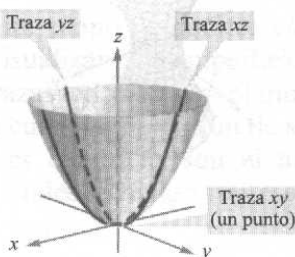
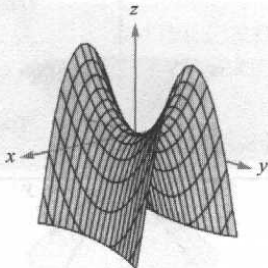
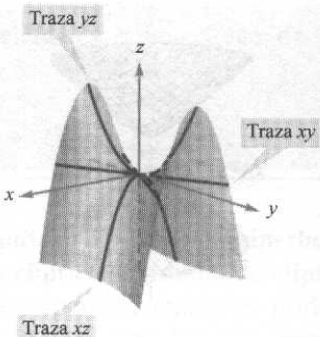
La ecuación:

$$+\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

determina un punto real único que es el (0,0,0) y recibe el nombre de ecuación del cono imaginario.

El punto singular del cono cuádrico es su vértice.

	Elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <table><tr><td>Traza</td><td>Plano</td></tr><tr><td>Elipse</td><td>Paralelo al plano xy</td></tr><tr><td>Elipse</td><td>Paralelo al plano xz</td></tr><tr><td>Elipse</td><td>Paralelo al plano yz</td></tr></table> La superficie es una esfera si $a = b = c \neq 0$.	Traza	Plano	Elipse	Paralelo al plano xy	Elipse	Paralelo al plano xz	Elipse	Paralelo al plano yz	
Traza	Plano									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Elipse	Paralelo al plano xz									
Elipse	Paralelo al plano yz									
	Hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <table><tr><td>Traza</td><td>Plano</td></tr><tr><td>Elipse</td><td>Paralelo al plano xy</td></tr><tr><td>Hipérbola</td><td>Paralelo al plano xz</td></tr><tr><td>Hipérbola</td><td>Paralelo al plano yz</td></tr></table> El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.	Traza	Plano	Elipse	Paralelo al plano xy	Hipérbola	Paralelo al plano xz	Hipérbola	Paralelo al plano yz	
Traza	Plano									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Hipérbola	Paralelo al plano xz									
Hipérbola	Paralelo al plano yz									
	Hiperboloide de dos hojas $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <table><tr><td>Traza</td><td>Plano</td></tr><tr><td>Elipse</td><td>Paralelo al plano xy</td></tr><tr><td>Hipérbola</td><td>Paralelo al plano xz</td></tr><tr><td>Hipérbola</td><td>Paralelo al plano yz</td></tr></table> El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.	Traza	Plano	Elipse	Paralelo al plano xy	Hipérbola	Paralelo al plano xz	Hipérbola	Paralelo al plano yz	
Traza	Plano									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Hipérbola	Paralelo al plano xz									
Hipérbola	Paralelo al plano yz									

	Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ <table><tr><td>Traza</td><td>Plano</td></tr><tr><td>Elipse</td><td>Paralelo al plano xy</td></tr><tr><td>Hipérbola</td><td>Paralelo al plano xz</td></tr><tr><td>Hipérbola</td><td>Paralelo al plano yz</td></tr></table> El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a ese eje son rectas que se cortan.	Traza	Plano	Elipse	Paralelo al plano xy	Hipérbola	Paralelo al plano xz	Hipérbola	Paralelo al plano yz	
Traza	Plano									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Hipérbola	Paralelo al plano xz									
Hipérbola	Paralelo al plano yz									
	Paraboloide elíptico $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <table><tr><td>Traza</td><td>Plano</td></tr><tr><td>Elipse</td><td>Paralelo al plano xy</td></tr><tr><td>Parábola</td><td>Paralelo al plano xz</td></tr><tr><td>Parábola</td><td>Paralelo al plano yz</td></tr></table> El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.	Traza	Plano	Elipse	Paralelo al plano xy	Parábola	Paralelo al plano xz	Parábola	Paralelo al plano yz	
Traza	Plano									
Elipse	Paralelo al plano xy									
Parábola	Paralelo al plano xz									
Parábola	Paralelo al plano yz									
	Paraboloide hiperbólico $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ <table><tr><td>Traza</td><td>Plano</td></tr><tr><td>Hipérbola</td><td>Paralelo al plano xy</td></tr><tr><td>Parábola</td><td>Paralelo al plano xz</td></tr><tr><td>Parábola</td><td>Paralelo al plano yz</td></tr></table> El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la potencia unidad.	Traza	Plano	Hipérbola	Paralelo al plano xy	Parábola	Paralelo al plano xz	Parábola	Paralelo al plano yz	
Traza	Plano									
Hipérbola	Paralelo al plano xy									
Parábola	Paralelo al plano xz									
Parábola	Paralelo al plano yz									

Superficies cuádricas (Extraído de Cálculo Vol.2 Larson/Hostetler/Edwards, Ed. McGraw Hill)



Algunos ejemplos ilustran la utilización de diferentes tipos de superficies en obras de Arquitectura



La Geode, ladera de la Cité des Sciences et de L'Industrie, cine IMAX estrella en la Villette, París. Con 36 metros de diámetro, fue en su momento, una sala de avanzada. Diseñada por el arq. Adrien Fainsilber a finales de los ochenta.



Puente peatonal que esta en la calle Corporation de Manchester, Inglaterra. Hiperboloide de una hoja.



Restaurante Los Manantiales del parque de Choximilco en la ciudad de México. El techo esta formado por ocho paraboloides hiperbólicos



El Salón de Conciertos de Walt Disney en Los Ángeles, diseñado por el ganador del premio Pritzker, Frank O. Gehry

Bibliografía

- Geometría Analítica Charles H. Lehmann. Limusa-Noriega-Editores
- Geometría Analítica -Joseph Kindle – Serie Schaum- Edit Mc Graw Hill
- Matemática para Arquitectura y Diseño- Ángeles Nicolini -Graciela Santa Maria – Susana Vasino- nueva librería
- Diccionario de Matemáticas– Santiago valiente Barderas -AWL
- Matemáticas I - Arqta. Beatriz Yeremián - FAUD-
- Matemática – Apuntes de Cátedra– Modulo III – DI. Arqta. Beatriz Yeremián- FAUD-
- Rectas en el espacio y cónicas- Apuntes de cátedra. F.A.D.U.- L.A. RAPUN-J.C. GARCIA ARRIBAS- C. MARTINEZ ONTALBA
- <http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/SUPERIOR/t2-Funciones-de-variasvariables/4-curvas-superficies/index.html>