

FÓRMULAS DE APLICACIÓN

matemática para diseño industrial



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE ARQUITECTURA,
URBANISMO Y DISEÑO
CARRERA de DISEÑO INDUSTRIAL
CÁTEDRA de MATEMÁTICA

TRIGONOMETRÍA

Sistemas de medición de ángulos. Equivalencias.

SISTEMA SEXAGESIMAL: 1 ángulo recto = 90°; 1° = 60'; 1' = 60''

SISTEMA CENTESIMAL: 1 ángulo recto = 100°; 1° = 100'; 1' = 100''

SISTEMA RADIAL: π (en radianes) se define como la relación entre el arco y el radio.

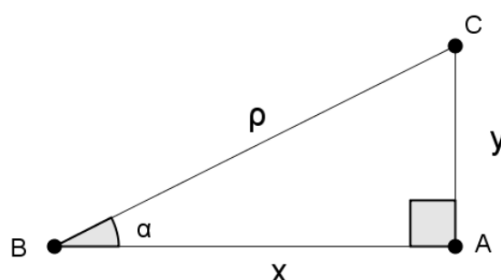
	ÁNGULO RECTO	ÁNGULO LLANO	ÁNGULO DE 1 GIRO
SEXAGESIMAL	90°	180°	360°
CENTESIMAL	100°	200°	400°
RADIAL	$\pi/2$ rad	π rad	2π rad

Relaciones trigonométricas para los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{y}{x}$$



Teorema de Pitágoras (ver gráfico anterior): $\rho^2 = x^2 + y^2$

Resolución de Triángulos Oblicuángulos

Teorema del Seno:

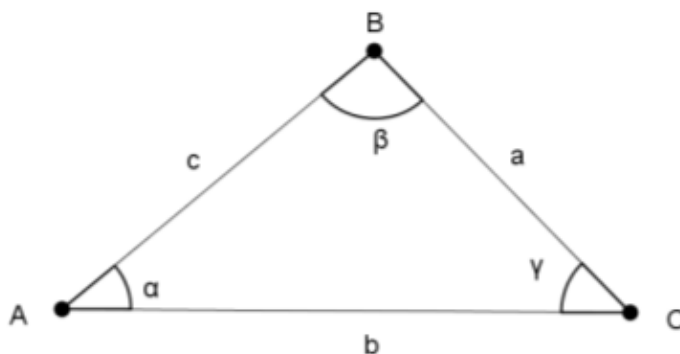
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

Teorema del Coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \operatorname{cos} \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{cos} \gamma$$



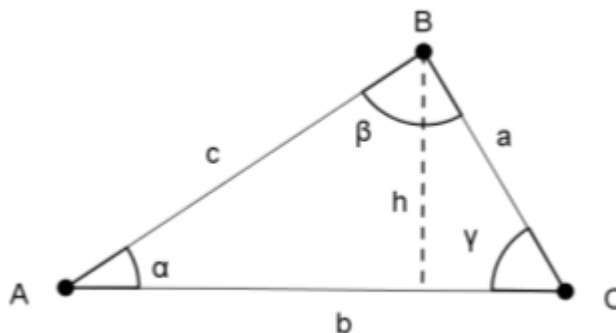
Cálculo del área de un triángulo

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} \quad (\text{Teorema Fundamental})$$

$$\text{Área} = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)} \quad (\text{Fórmula de Herón})$$

$$\text{donde } p = \frac{a + b + c}{2}$$



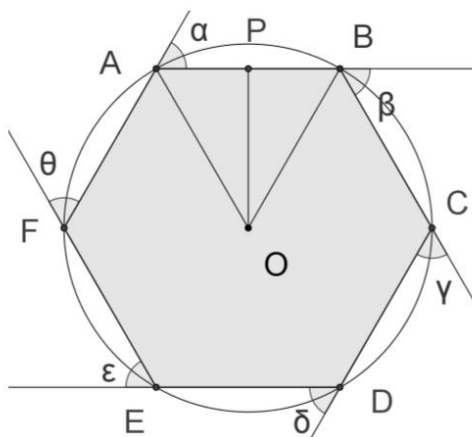
POLÍGONOS

Orden de un polígono (**n**): es el número de vértices = número de lados = número de ángulos interiores = número de ángulos exteriores.

Polígono regular: sus lados y sus ángulos interiores son respectivamente congruentes.

Polígono regular inscrito en una circunferencia

El polígono está **inscrito** en una circunferencia si los vértices del polígono pertenecen a la circunferencia.



Elementos

Vértices: A, B, C, D, E, F

Lados: AB, BC, CD, DE, EF, FA

Ángulos interiores: ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB

Ángulos exteriores: α , β , γ , δ , ϵ , θ

Centro de la circunferencia: O

Radio de la circunferencia: OA

Apotema del polígono: OP. Es el segmento determinado por el centro de la circunferencia y el punto medio de un lado. Se verifica que es perpendicular a dicho lado.

Ángulo central: AOB

Propiedades

Suma de ángulos interiores = $180^\circ \cdot (n - 2)$

Suma de ángulos exteriores = 360°

Número de diagonales = $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$

Propiedades de polígonos regulares

Ángulo interior = $\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$

Ángulo central = ángulo exterior = $\frac{360^\circ}{n}$

Superficie polígono regular = $\frac{n \cdot l \cdot Ap}{2}$

GEOMETRÍA ANALÍTICA. SISTEMAS DE COORDENADAS

Sistema de coordenadas unidimensional

Distancia horizontal entre 2 puntos

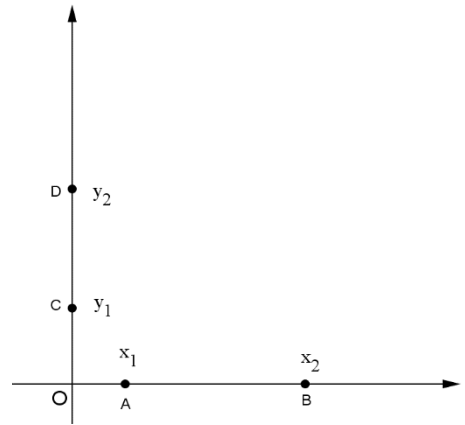
$$|\overline{AB}| = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Distancia vertical

$$|\overline{CD}| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

$|\overline{AB}|$ es la longitud del segmento AB.

Las barras $||$ significan **valor absoluto**.



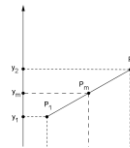
Sistemas de coordenadas en el plano: rectangular y polar

Distancia entre dos puntos

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de un segmento

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Relaciones entre los sistemas

De polares a rectangulares

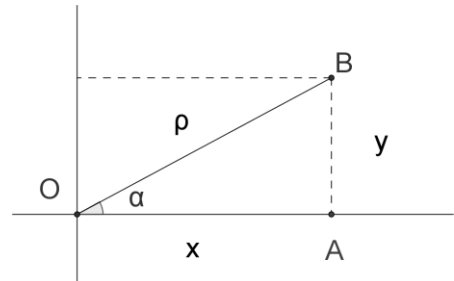
$$x = \rho \cdot \cos \alpha$$

$$y = \rho \cdot \sin \alpha$$

De rectangulares a polares

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{y}{x}$$



GEOMETRÍA ANALÍTICA. RECTA

Ecuación general o implícita: $Ax + By + C = 0$

Forma explícita: $y = ax + b$

Forma segmentaria o reducida: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Ecuación de la recta que pasa por un punto $P(x_1; y_1)$ cuya pendiente es "a": $y - y_1 = a(x - x_1)$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

Paralelismo y perpendicularidad

Dos rectas son paralelas si poseen la misma pendiente.

$$R1: y = a_1x + b_1 \quad \wedge \quad R2: y = a_2x + b_2 \quad \wedge \quad R1 \parallel R2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2$$

Dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.

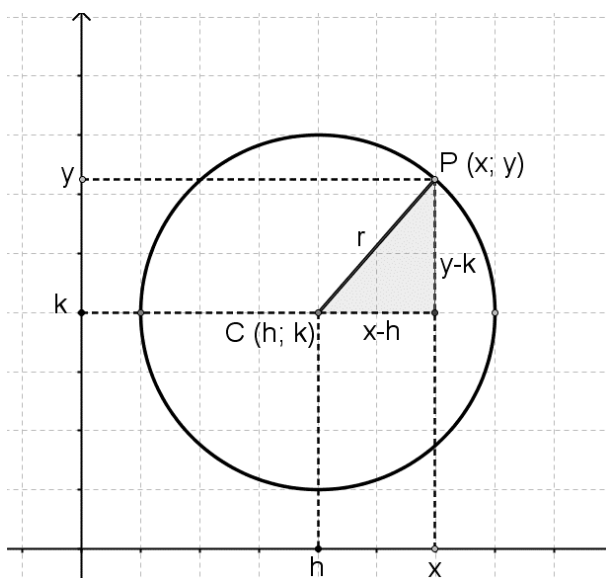
$$R1: y = a_1x + b_1 \quad \wedge \quad R2: y = a_2x + b_2 \quad \wedge \quad R1 \perp R2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = -1/a_2$$

CIRCUNFERENCIA

Ecuación ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

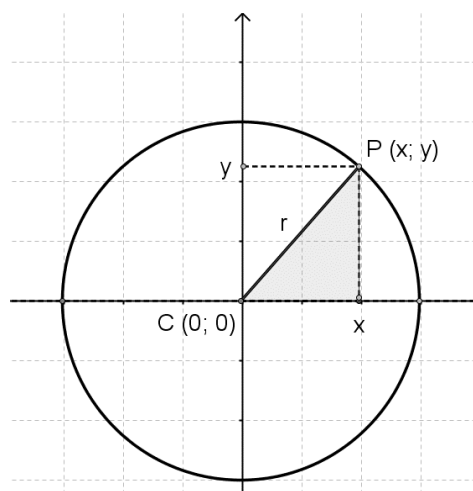
El centro de la circunferencia no coincide con el origen.



Ecuación canónica

$$x^2 + y^2 = r^2$$

El centro de la circunferencia coincide con el origen



Ecuación general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde:

$$D = -2 \cdot h$$

$$E = -2 \cdot k$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2$$

y:

$$h = \frac{D}{-2}$$

$$k = \frac{E}{-2}$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + h^2 + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

$$\downarrow$$

$$-2h = D$$

$$\downarrow$$

$$-2k = E$$

$$\downarrow$$

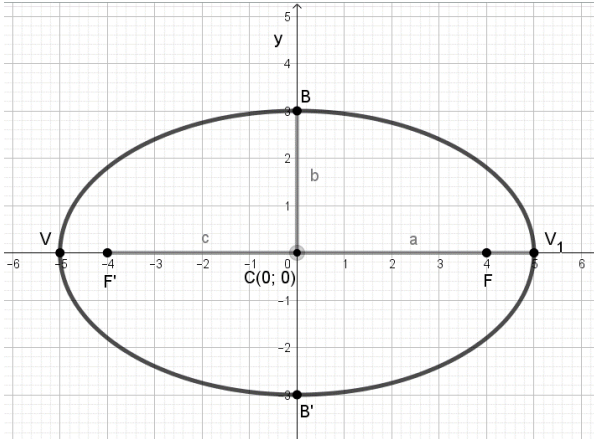
$$h^2 + k^2 - r^2 = F$$

ELIPSE

El centro coincide con el origen del sistema

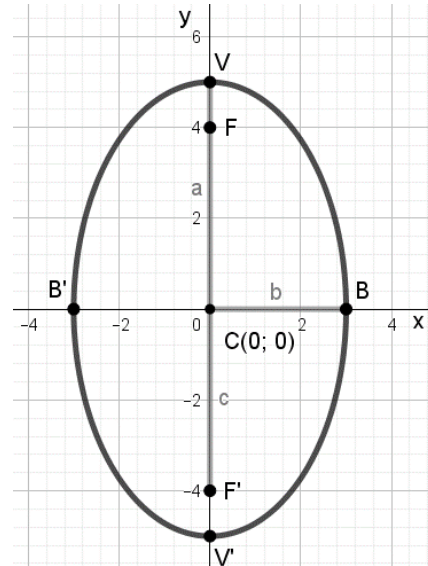
A eje horizontal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



A eje vertical

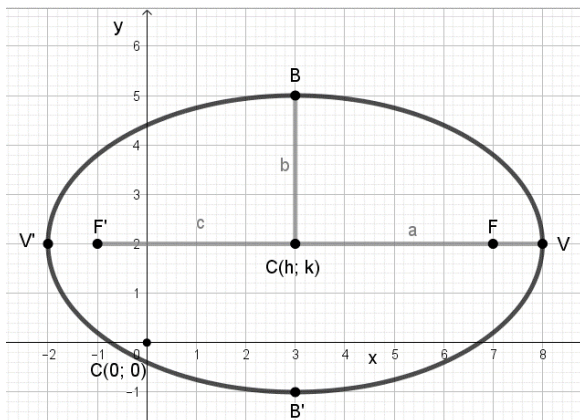
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



El centro no coincide con el origen del sistema

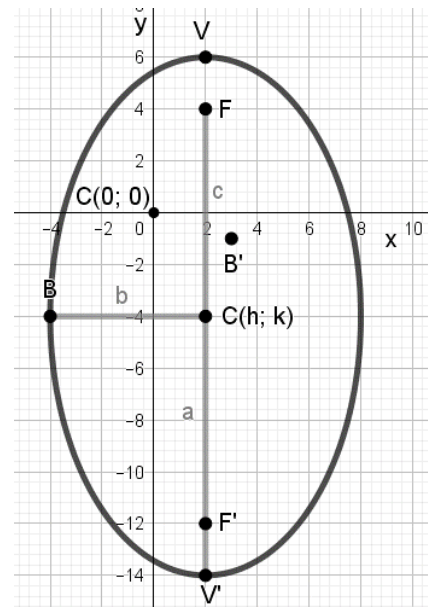
A eje horizontal

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



A eje vertical

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Excentricidad

$$e = \frac{c}{a} \text{ con } e < 1$$

Lado recto (LR)

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

Perímetro

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

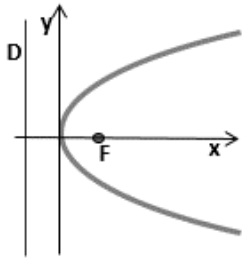
Superficie

$$A = a \cdot b \cdot \pi$$

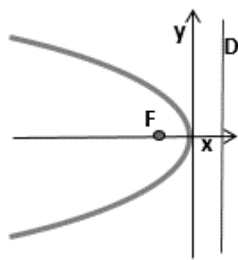
PARÁBOLA

El vértice de la parábola coincide con el origen del sistema ($h = 0$ y $k = 0$)

A eje horizontal

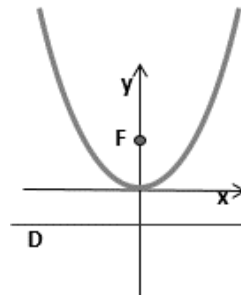


$$y^2 = 4px$$

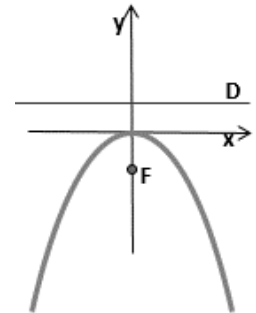


$$y^2 = -4px$$

A eje vertical



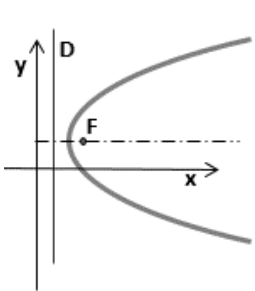
$$x^2 = 4py$$



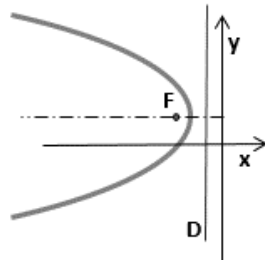
$$x^2 = -4py$$

El vértice de la parábola no coincide con el origen del sistema

A eje horizontal

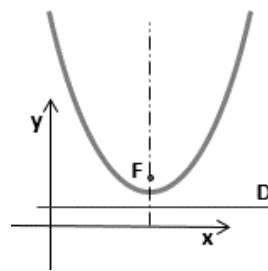


$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

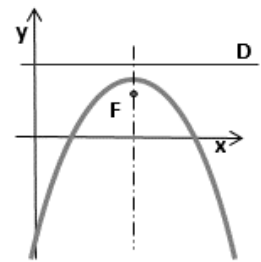


$$(y - k)^2 = -4p(x - h)$$

A eje vertical



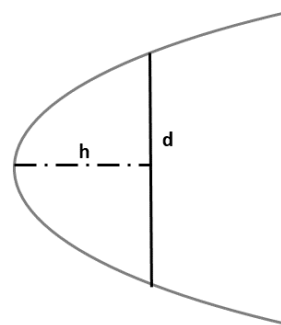
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$



$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

Fórmula para calcular el área del sector parabólico:

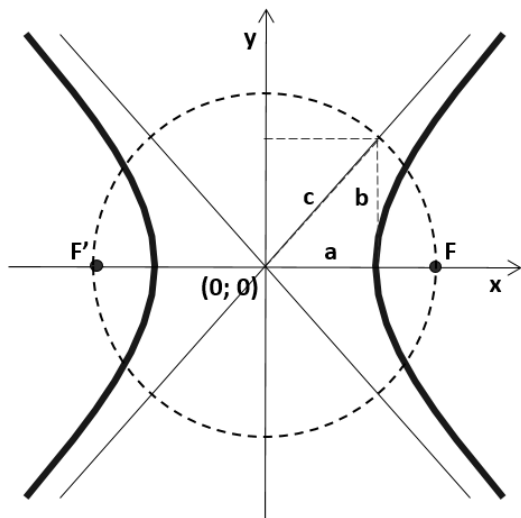
$$\text{Área} = \frac{2}{3} \cdot d \cdot h$$



HIPÉRBOLA

El centro de la hipérbola coincide con el origen del sistema ($h = 0$ y $k = 0$)

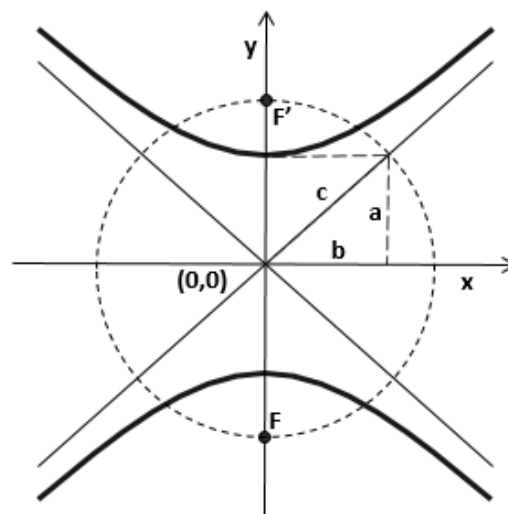
A eje horizontal



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Asíntotas $y = \pm \frac{b}{a}x$

A eje vertical

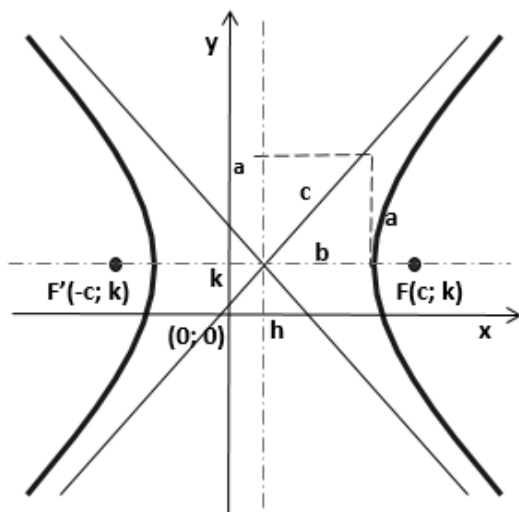


$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Asíntotas $y = \pm \frac{a}{b}x$

El centro de la hipérbola no coincide con el origen del sistema

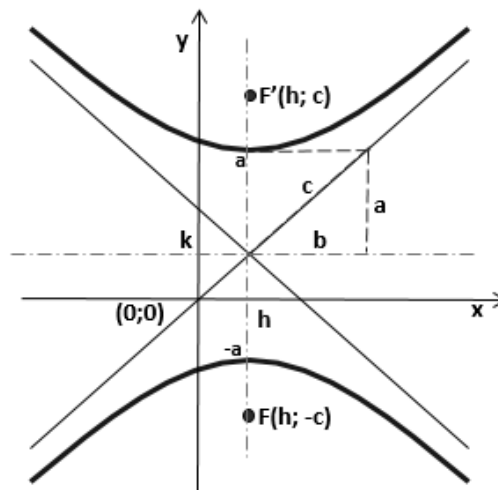
A eje horizontal



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Asíntotas $\pm \frac{b}{a}(x-h) = (y-k)$

A eje vertical



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Asíntotas $\pm \frac{a}{b}(x-h) = (y-k)$

Relación entre a , b y c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Excentricidad

$$e = \frac{c}{a}$$

SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

Relaciones entre coordenadas rectangulares y polares

Pasaje

De coordenadas rectangulares a polares

De coordenadas polares a rectangulares

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x = \rho \cdot \cos\alpha$$

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\rho}$$

$$y = \rho \cdot \cos\beta$$

$$\beta = \arccos \frac{y}{\rho}$$

$$z = \rho \cdot \cos\gamma$$

$$\gamma = \arccos \frac{z}{\rho}$$

Relaciones entre coordenadas rectangulares y cilíndricas

Pasaje

De coordenadas rectangulares a cilíndricas

De coordenadas cilíndricas a rectangulares

$$\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = \theta \cdot \cos\alpha$$

$$\alpha = \arctg \frac{y}{x}$$

$$y = \theta \cdot \sen\alpha$$

$$z = z$$

$$z = z$$

Relaciones entre coordenadas rectangulares y esféricas

Pasaje

De coordenadas rectangulares a esféricas

De coordenadas esféricas a rectangulares

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x = \rho \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\alpha = \arctg \frac{y}{x}$$

$$y = \rho \cdot \cos\beta \cdot \sen\alpha$$

$$\beta = \arcsen \frac{z}{\rho}$$

$$z = \rho \cdot \sen\beta$$

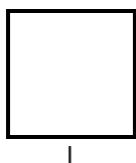
Dadas las coordenadas de dos puntos: $P(x_1; y_1; z_1)$; $Q(x_2; y_2; z_2)$, la distancia entre ellos es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

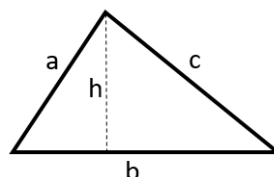
Las coordenadas del punto medio entre P y Q son:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

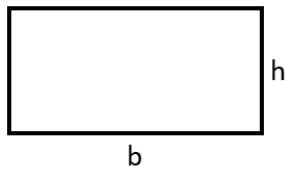
PERÍMETRO (P), ÁREA (A) y VOLUMEN (V)



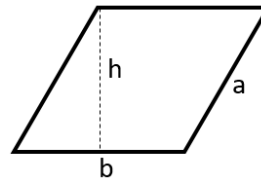
Cuadrado
 $P = 4l$
 $A = l^2$



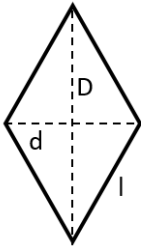
Triángulo
 $P = a + b + c$
 $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$



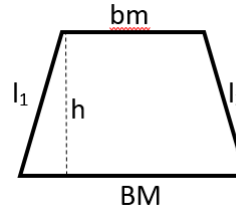
Rectángulo
 $P = 2(b + h)$
 $A = b \cdot h$



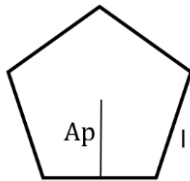
Paralelogramo
 $P = 2(a + b)$
 $A = b \cdot h$



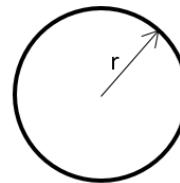
Rombo
 $P = 4l$
 $A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d$



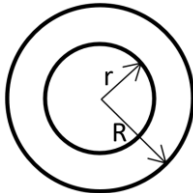
Trapezio
 $P = B + b + l_1 + l_2$
 $A = \frac{(BM + bm) \cdot h}{2}$



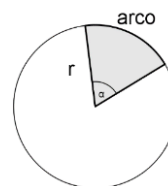
Polígono regular de n
 lados
 $P = n \cdot l$
 $A = \frac{P \cdot Ap}{2}$



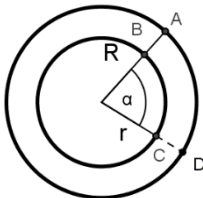
Circunferencia
 y círculo
 $P = 2 \cdot \pi \cdot r$
 $A = \pi \cdot r^2$



Corona circular
 $A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

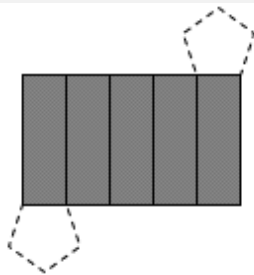


Sector circular
 $\text{arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot \alpha}{360^\circ}$
 $A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360^\circ}$
 $A = \frac{1}{2} \cdot \text{arco} \cdot \text{radio}$

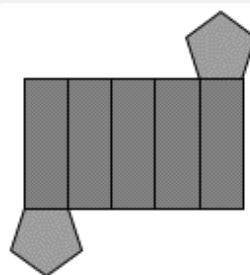


Trapezio circular ABCD
 $A = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \alpha}{360^\circ}$

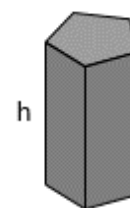
Prisma recto



Área lateral
 $A_L = P_B \cdot h$



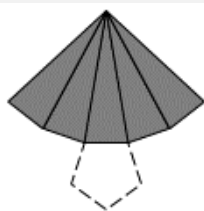
Área total
 $A_T = A_L + 2 A_B$



Volumen
 $V = A_B \cdot h$

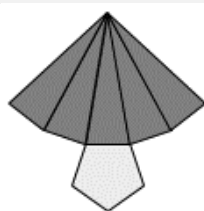
Referencias: A_B (área de la base), A_L (área lateral), h (altura), h_c (altura de la cara), P_B (perímetro de la base), V (volumen).

Pirámide recta



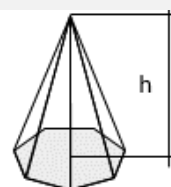
Área lateral

$$A_L = 1/2 \cdot P_B \cdot h_c$$



Área total

$$A_T = A_L + A_B$$

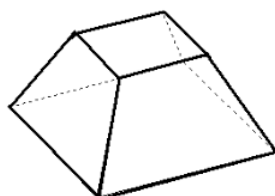


Volumen

$$V = 1/3 \cdot A_B \cdot h$$

Referencias: A_B (área de la base), A_L (área lateral), h (altura), h_c (altura de la cara), P_B (perímetro de la base), V (volumen).

Tronco de pirámide



Área lateral

$$A_L = 1/2 \cdot (P_B + P_b) \cdot h_c$$

Área total

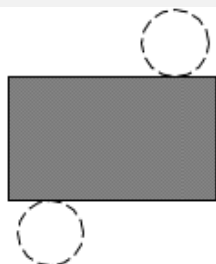
$$A_T = A_B + A_b$$

Volumen

$$V = 1/3 \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) \cdot h$$

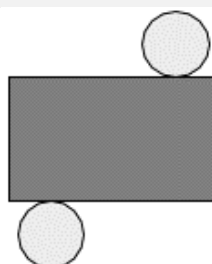
Referencias: A_B (área de la base mayor), A_b (área de la base menor), A_L (área lateral), h (altura), h_c (altura de la cara), P_B (perímetro de la base mayor), P_b (perímetro de la base menor), V (volumen).

Cilindro



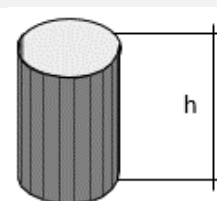
Área lateral

$$A_L = P_B \cdot h$$



Área total

$$A_T = A_L + 2 \cdot A_B$$

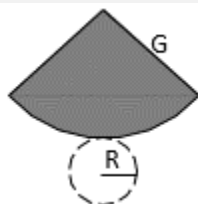


Volumen

$$V = A_B \cdot h$$

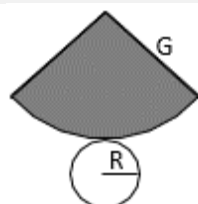
Referencias: A_B (área de la base), A_L (área lateral), A_T (área total), h (altura), h_c (altura de la cara), P_B (perímetro de la base), V (volumen).

Cono



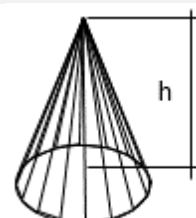
Área lateral

$$A_L = G \cdot R \cdot \pi$$



Área total

$$A_T = A_L + A_B$$

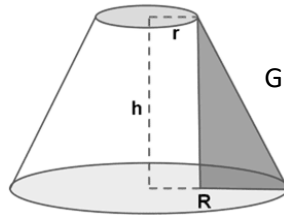


Volumen

$$V = 1/3 \cdot A_B \cdot h$$

Referencias: A_B (área de la base), A_L (área lateral), A_T (área total), h (altura), G (generatriz), h_c (altura de la cara), R (radio de la base), V (volumen).

Cono trunco



Área lateral

$$A_L = \pi \cdot (R + r) \cdot G$$

Área total

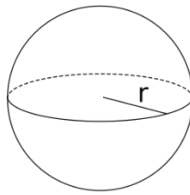
$$A_T = \pi \cdot (R + r) \cdot G + A_B + A_b$$

Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

Referencias: A_B (área de la base mayor), A_b (área de la base menor), A_L (área lateral), A_T (área total), h (H: altura), G (generatriz), R (radio de la base mayor), r (R' : radio de la base menor), V (volumen).

Esfera



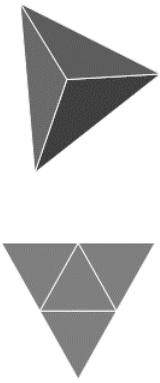
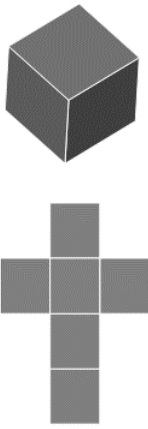
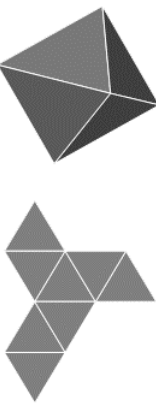
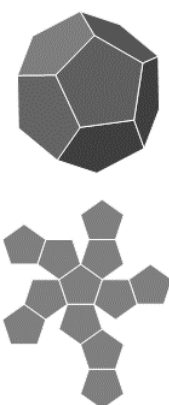
Superficie esférica

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Volumen de la esfera

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Poliedros regulares

	TETRAEDRO	HEXAEDRO	OCTAEDRO	DODECAEDRO	ICOSAEDRO
					
Nº de caras	4	6	8	12	20
Nº de vértices	4	8	6	20	12
Nº de aristas	6	12	12	30	30
Polígonos de las caras	Triángulo	Cuadrado	Triángulo	Pentágono	Triángulo
Superficie	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$5a^2\sqrt{3}$
	$1,7321 a^2$	$6 a^2$	$3,4641 a^2$	$20,6457 a^2$	$8,6603 a^2$
Volumen	$a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$	a^3	$a^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$
	$0,1179 a^3$	a^3	$0,4714 a^3$	$7,6631 a^3$	$2,1817 a^3$