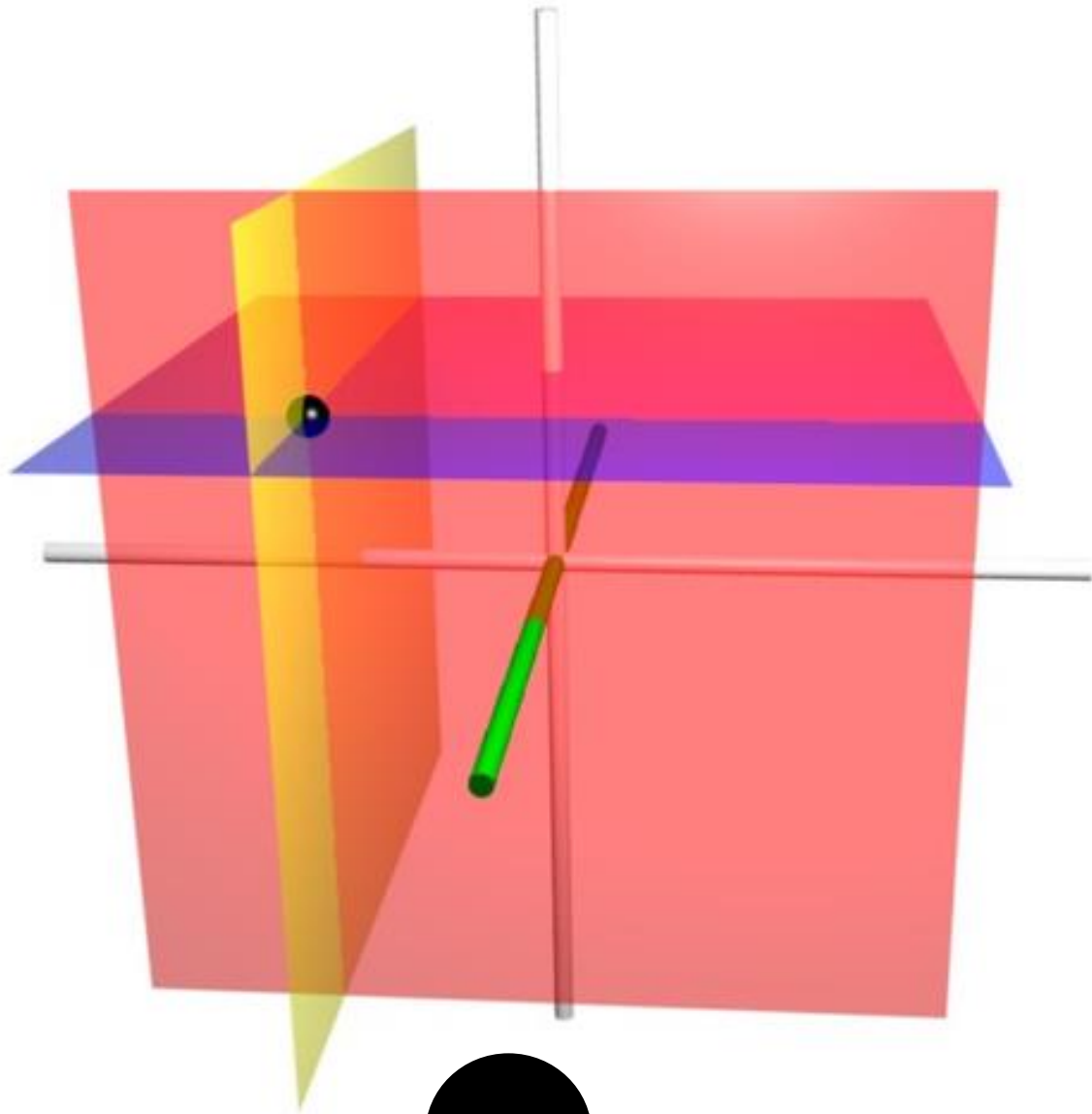
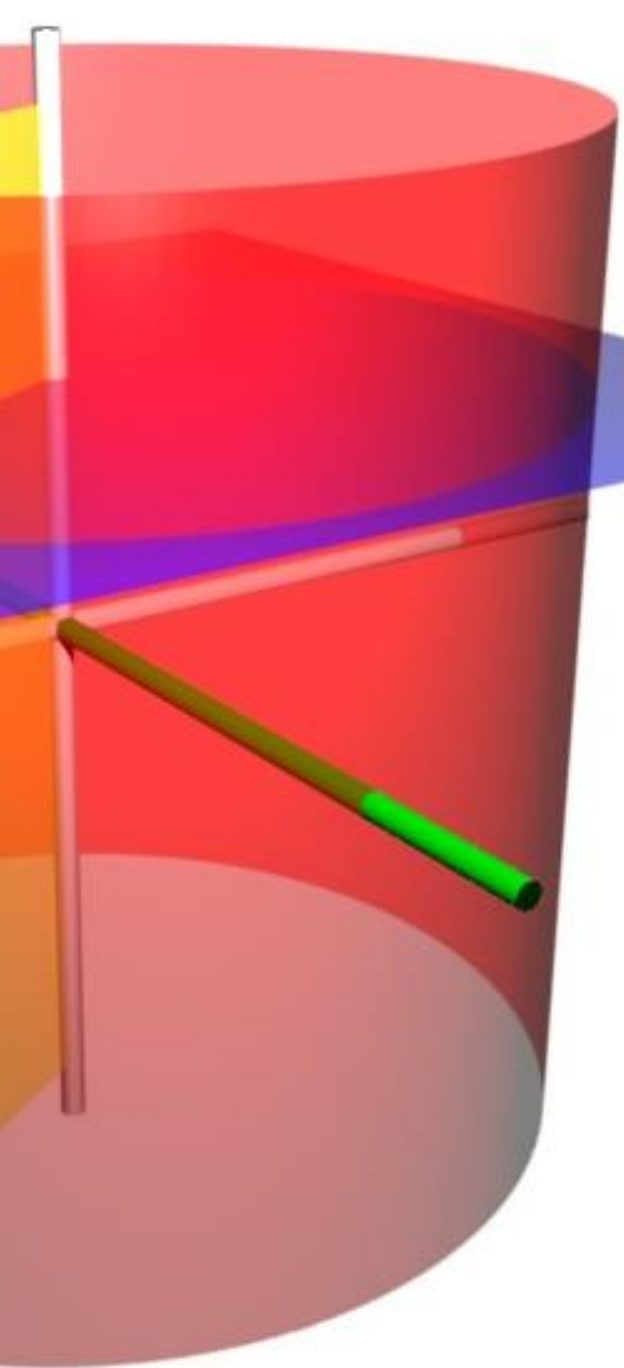




matDI

UT8_SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO



ESTRUCTURA DE CONTENIDOS

1. APLICACIONES

2. ESPACIO CARTESIANO. SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

2.1. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

2.1.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

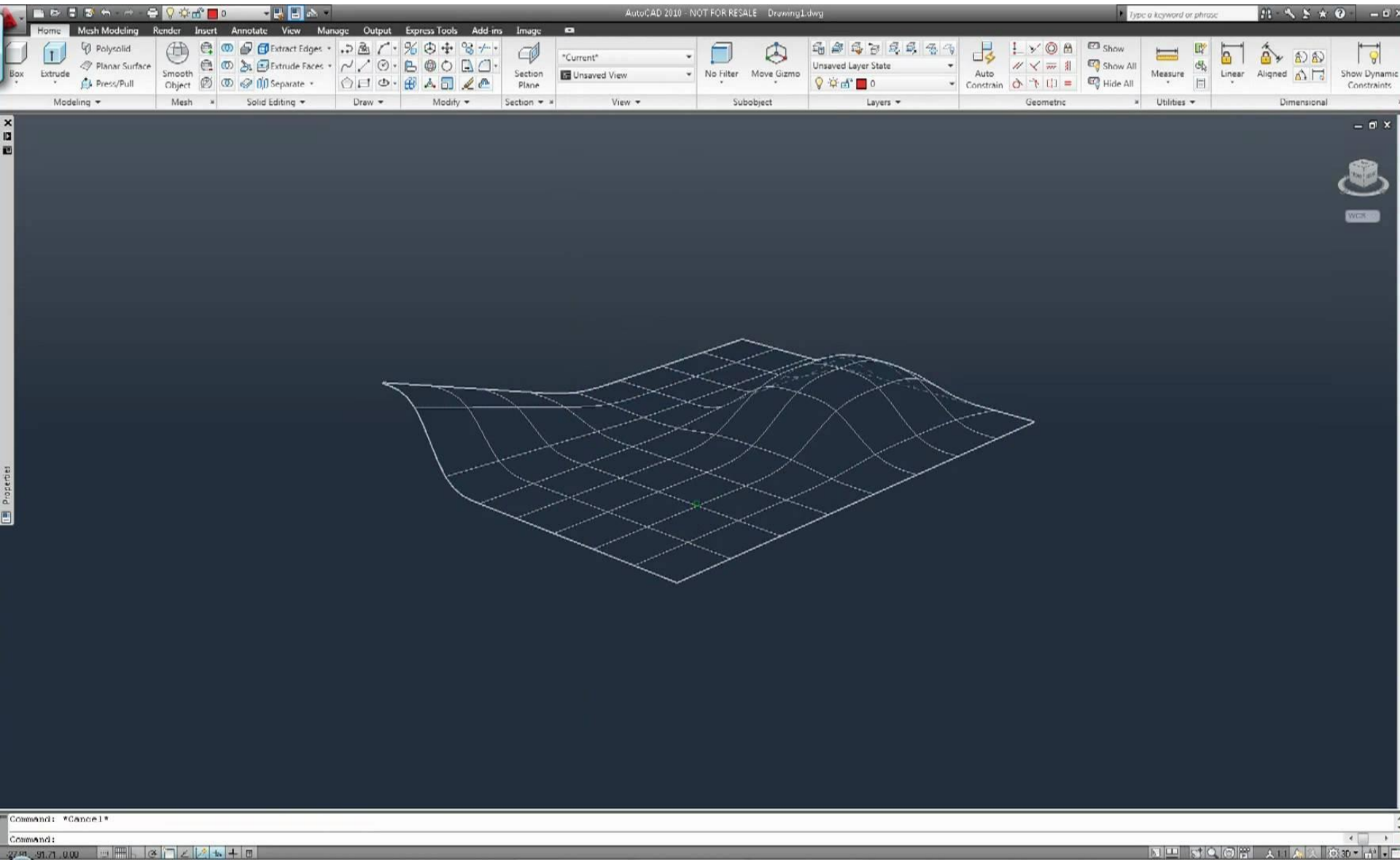
2.1.2. PUNTO MEDIO

2.2. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

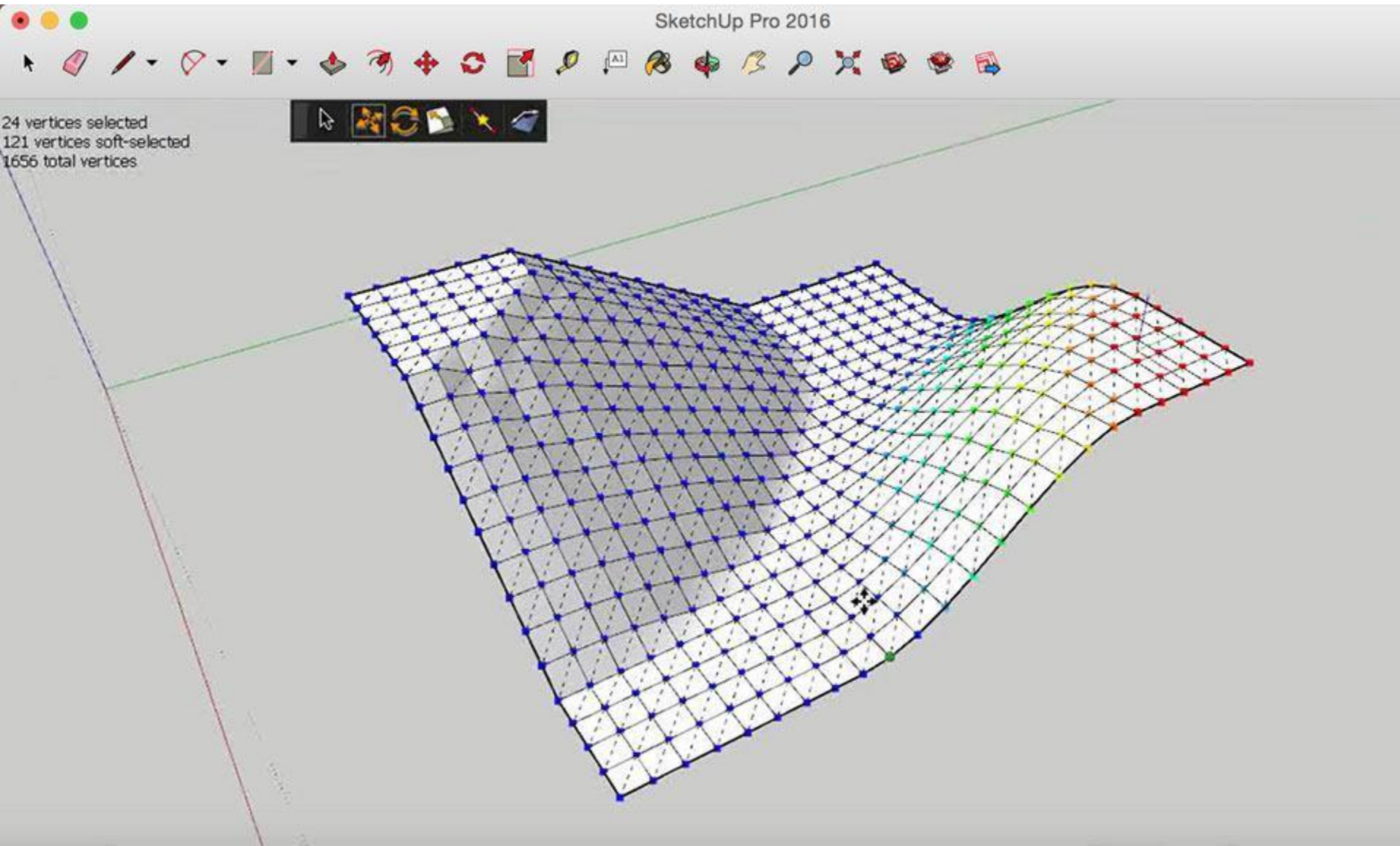
2.3. SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

2.4. SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

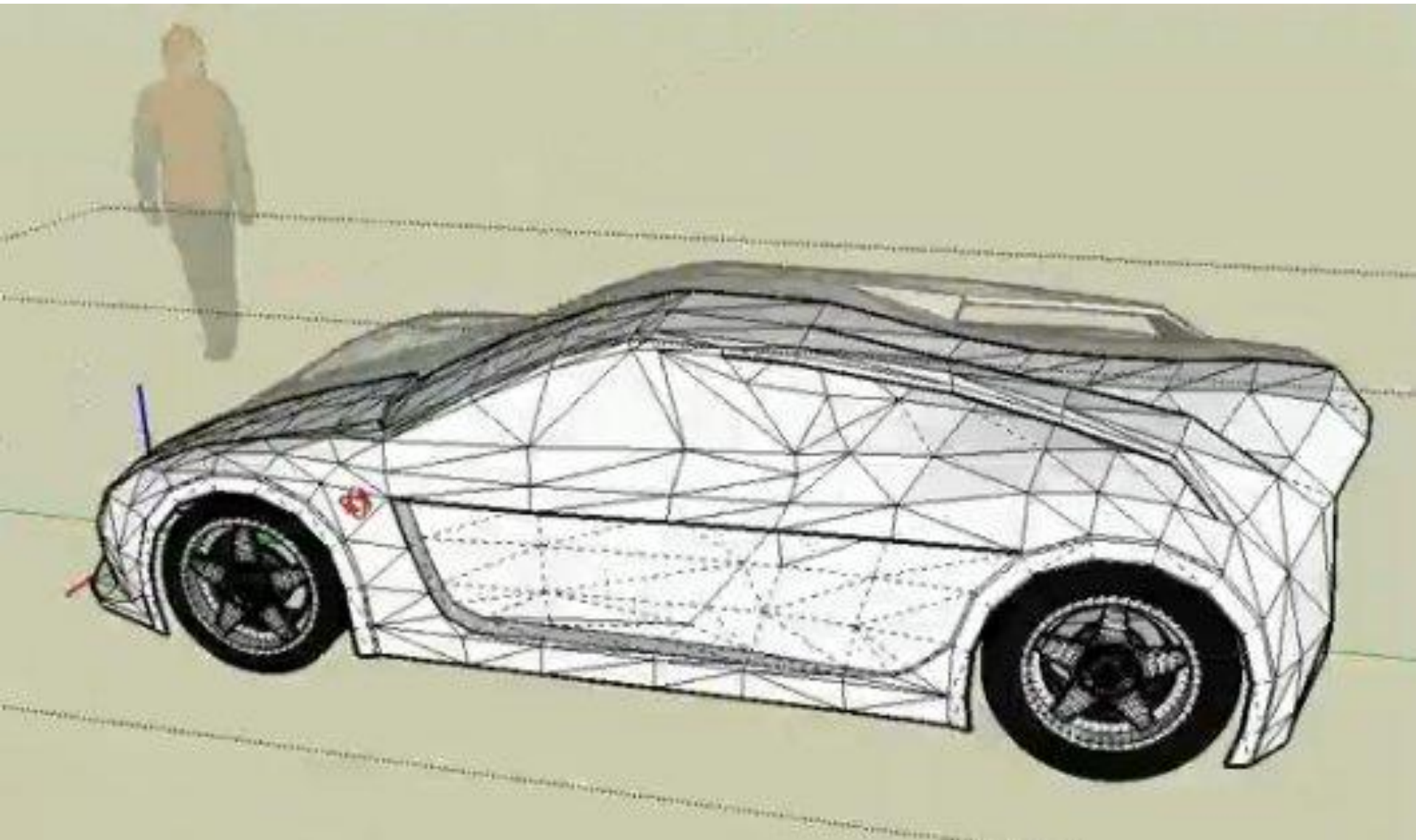
1. APLICACIONES



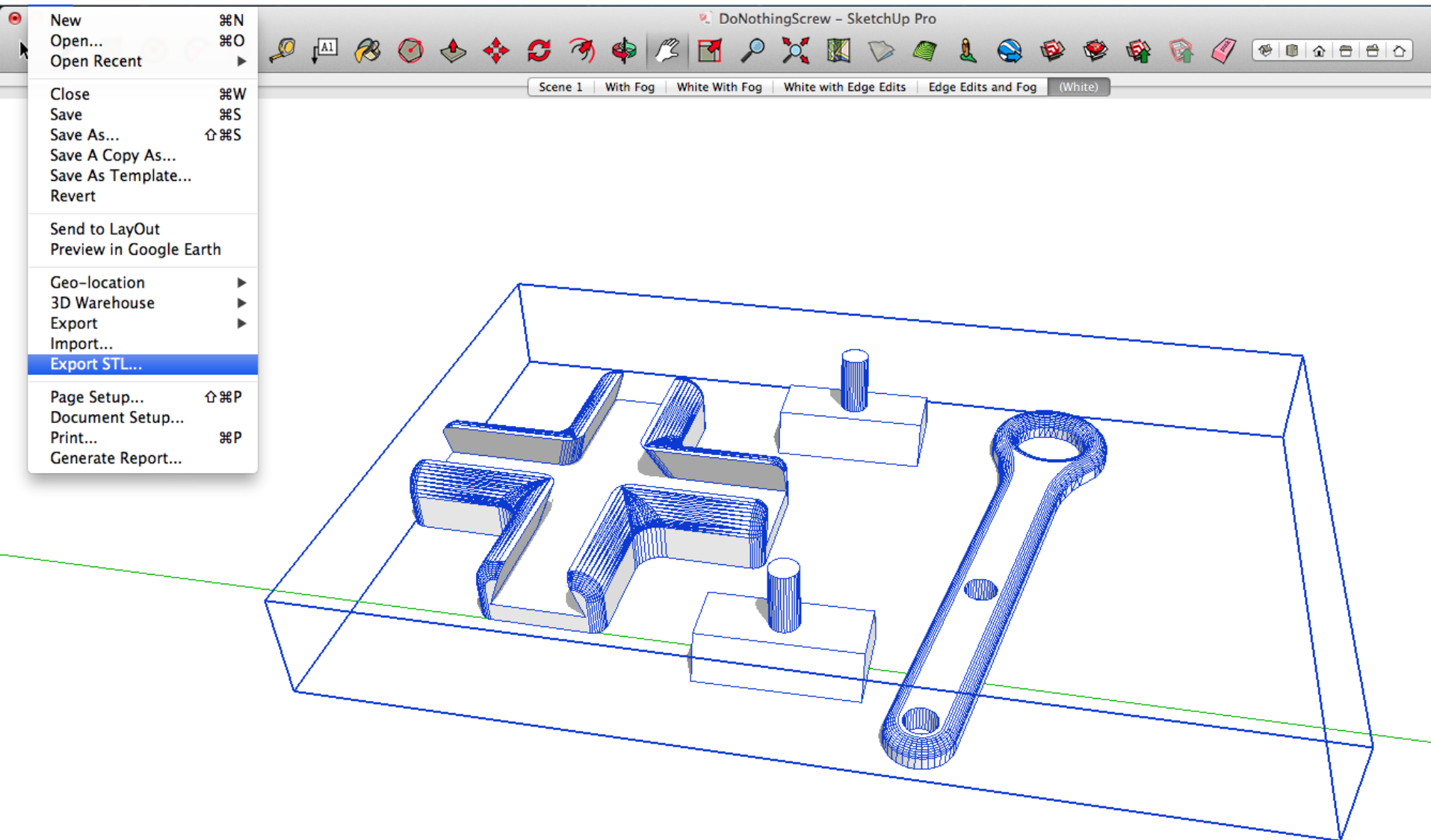
1. APLICACIONES



1. APLICACIONES

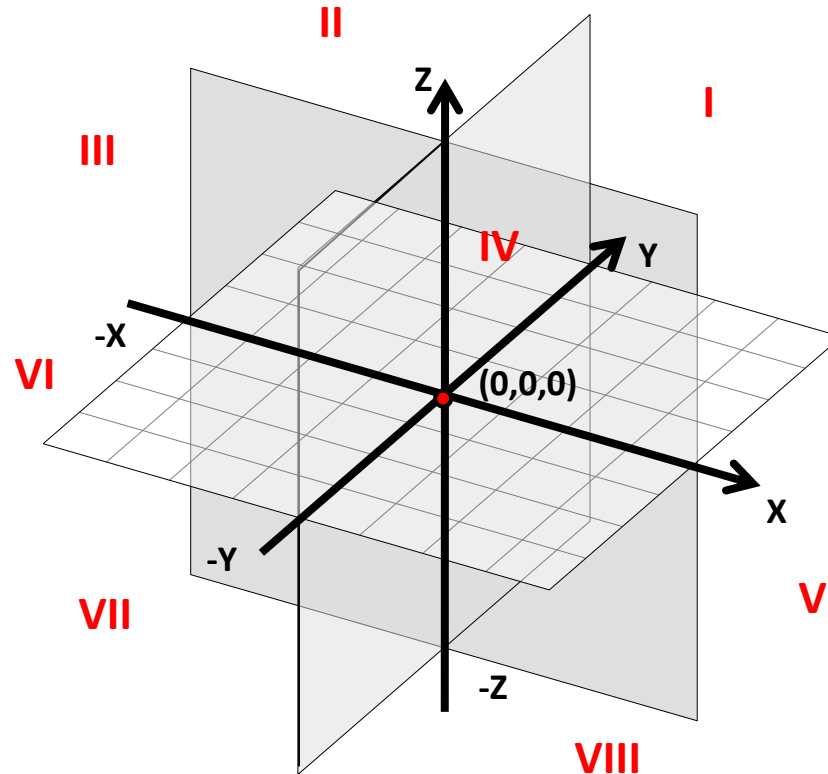


1. APLICACIONES



2. ESPACIO CARTESIANO | SISTEMA DE COORDENADAS

Sistema de referencias compuesto por tres planos perpendiculares entre sí, que dividen el espacio en ocho octantes y cuyas intersecciones dan origen a los tres ejes x , y , z .



Todo punto puede ser representado a partir de **4 sistemas de coordenadas en el espacio**.

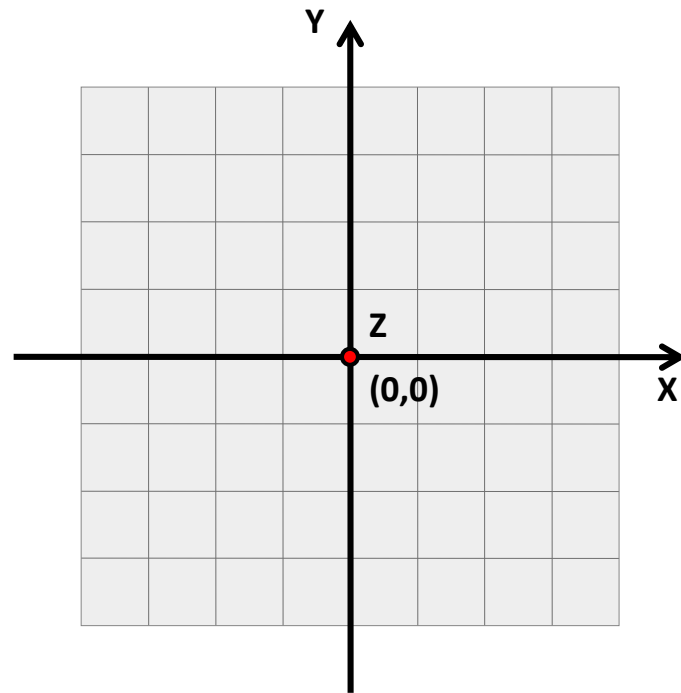
2. SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

1. SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS $P (x; y ; z)$
2. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES $P (\rho; \alpha; \beta; \gamma)$
3. SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS $P (\theta; \alpha; z)$
4. SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS $P (\rho; \alpha; \beta)$

2. SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO |

EJES **X** E **Y**

PLANO **XY**



¿qué sabemos?

2. SISTEMAS DE COORDENADAS EN EL ESPACIO

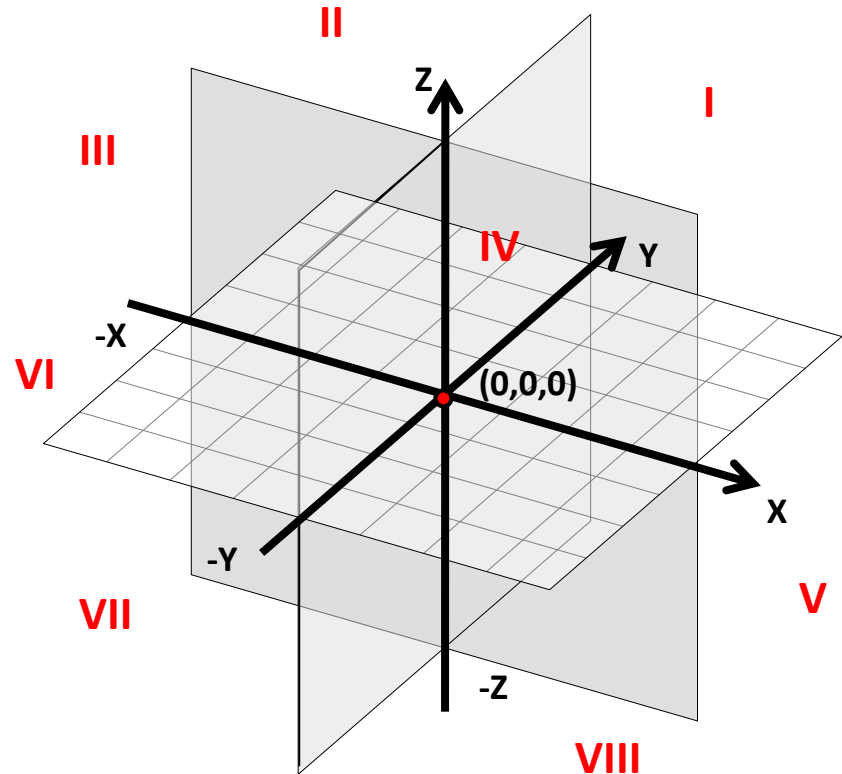
PLANOS COORDENADOS

PLANO XY

PLANO YZ

PLANO XZ

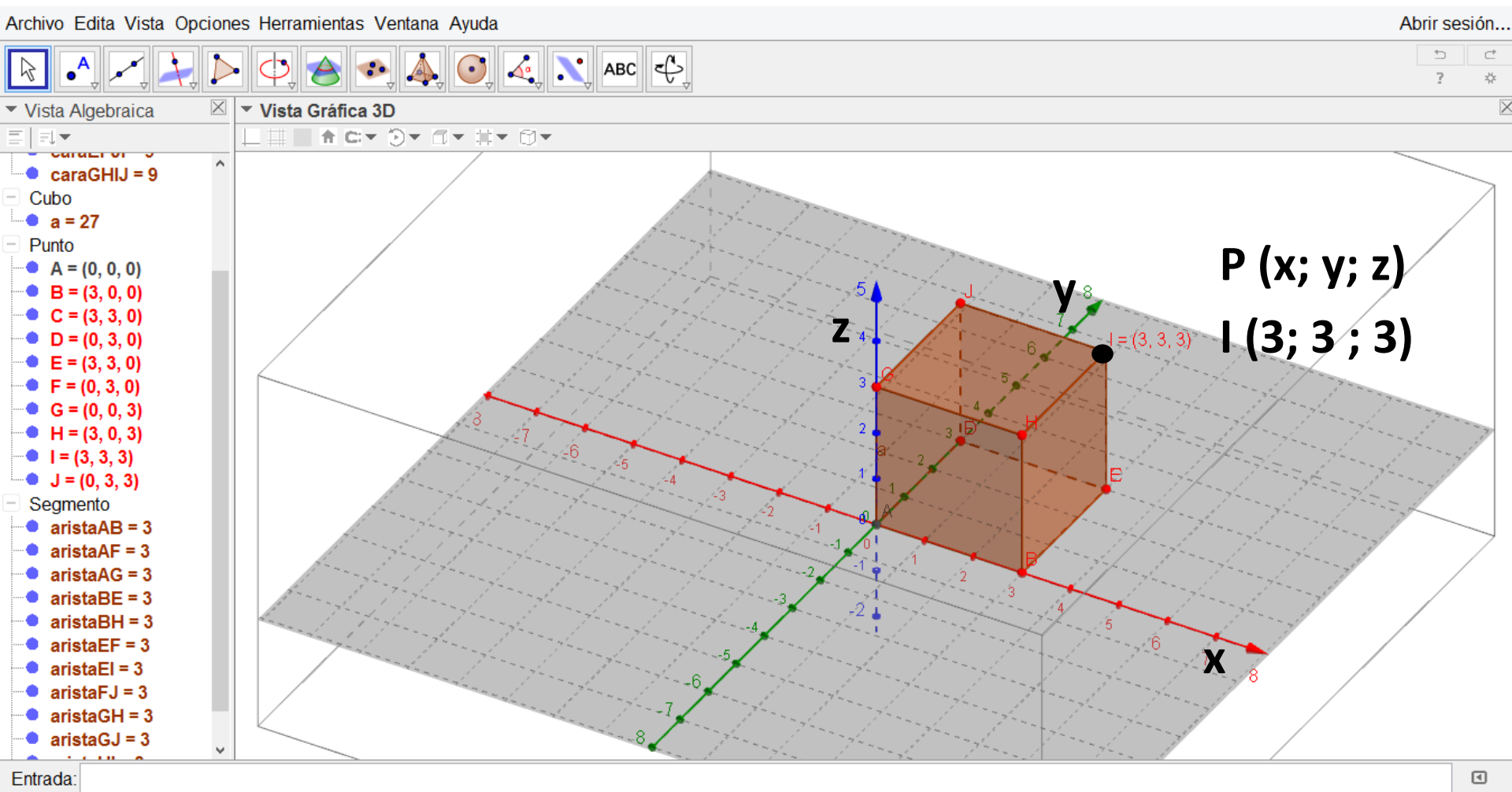
OCTANTES



2.1. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

Todo punto en el espacio queda definido a partir de **tres distancias**

$$P(x; y; z)$$



2.1.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

...para el caso en que uno de los puntos coincida con el origen

$$|\overline{OP}| = \rho$$

$$|\overline{OP}| = \sqrt{\overline{ON}^2 + \overline{NP}^2}$$
$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$$

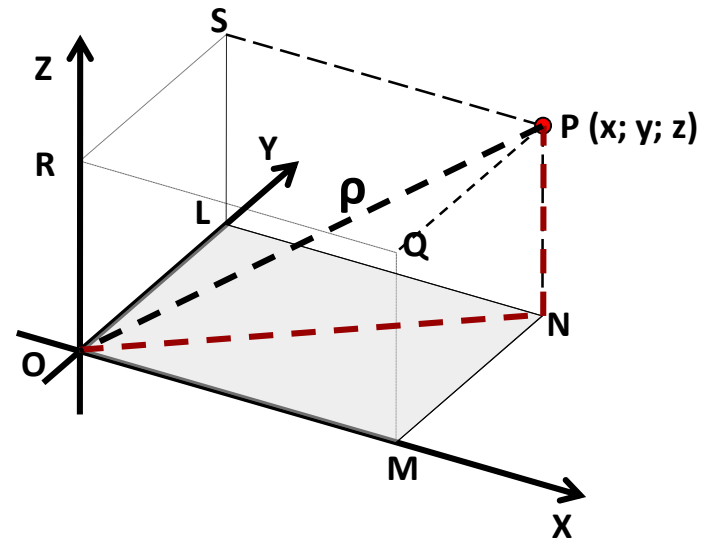
$$|\overline{OP}| = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{MN}^2 + \overline{NP}^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\overline{SP} = \overline{LN} = \overline{OM} = x$$

$$\overline{QP} = \overline{MN} = \overline{OL} = y$$

$$\overline{NP} = \overline{MQ} = \overline{OR} = z$$



2.1.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

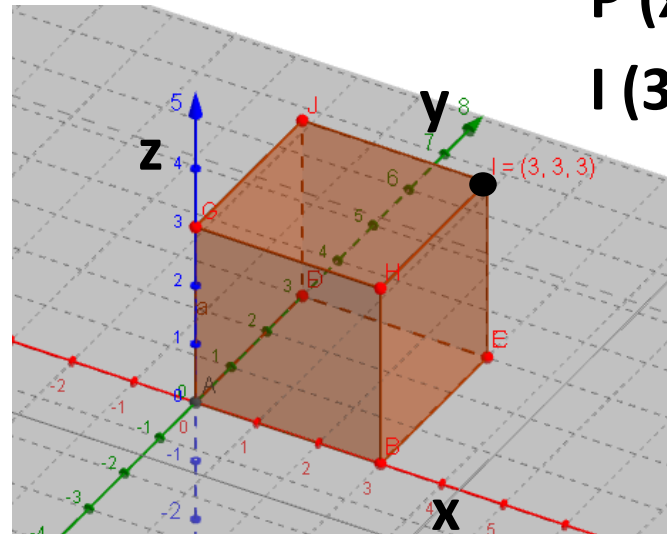
Ejemplo:

Calcular la distancia de I (3; 3;3) al origen del sistema

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}$$

$$\rho = \sqrt{27} = 5,20$$

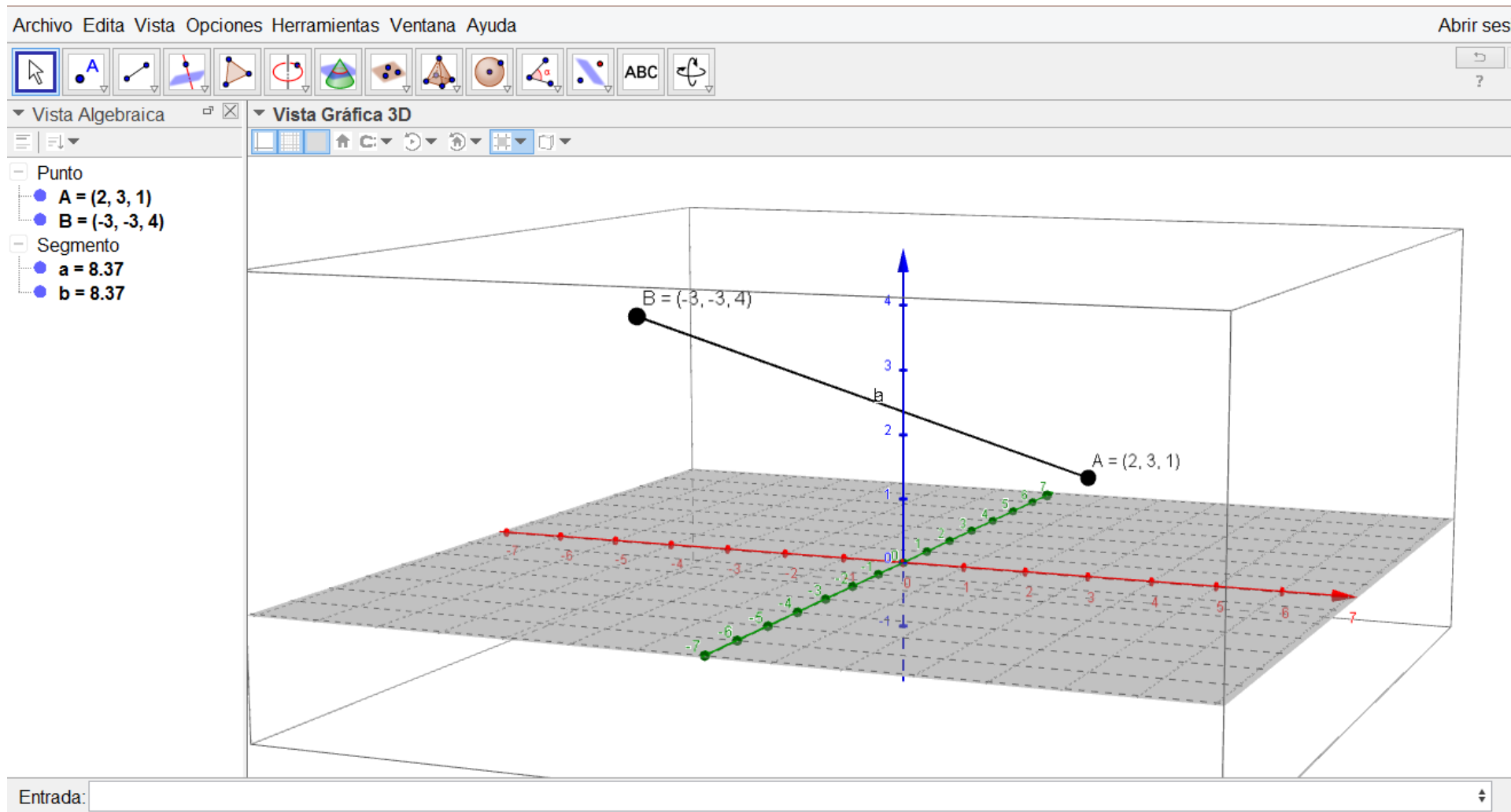


P (x; y; z)

I (3; 3 ; 3)

2.1.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

...para el caso de dos puntos cualesquiera



2.1.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

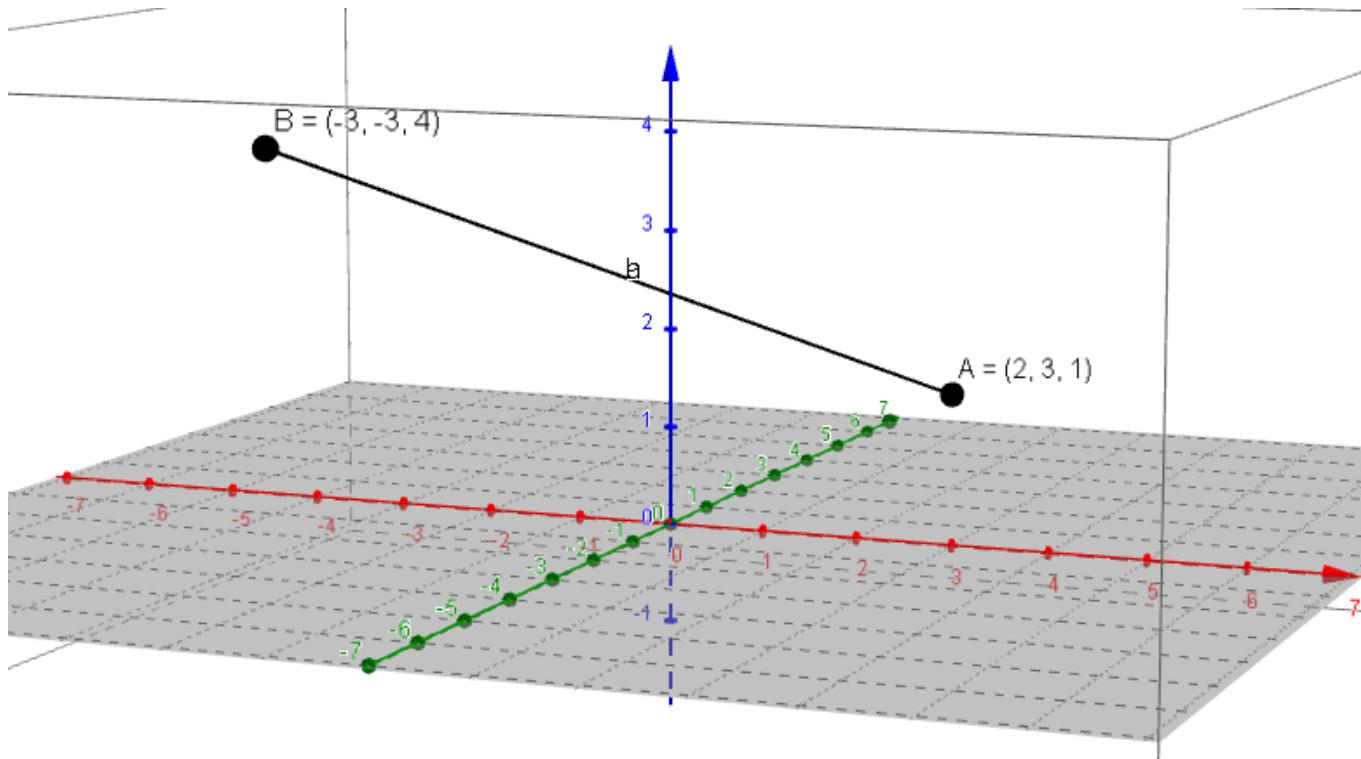
...para el caso de dos puntos cualesquiera

$P_1 (x_1; y_1; z_1)$

$P_2 (x_2; y_2; z_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Punto
 - $A = (2, 3, 1)$
 - $B = (-3, -3, 4)$
- Segmento
 - $a = 8.37$
 - $b = 8.37$



$A = P_1 (2; 3; 1)$

$x_1 = 2$

$y_1 = 3$

$z_1 = 1$

$B = P_2 (-3; -3; 4)$

$x_2 = -3$

$y_2 = -3$

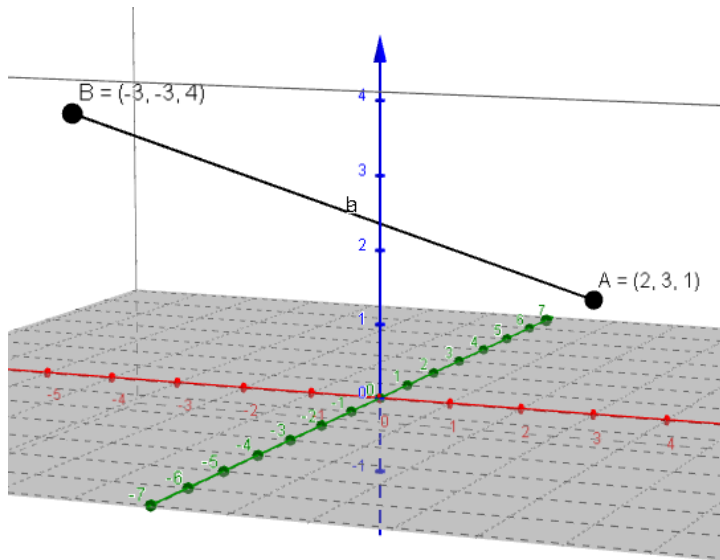
$z_2 = 4$

2.1.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Ejemplo:

Calcular la distancia entre P1 (2; 3; 1) y P2 (-3; -3; 4)

P₁ (2; 3; 1)	P₂ (-3; -3; 4)
x₁=2	x₂=-3
y₁=3	y₂=-3
z₁=1	z₂=4



P₁ (x₁; y₁; z₁)

P₂ (x₂; y₂; z₂)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

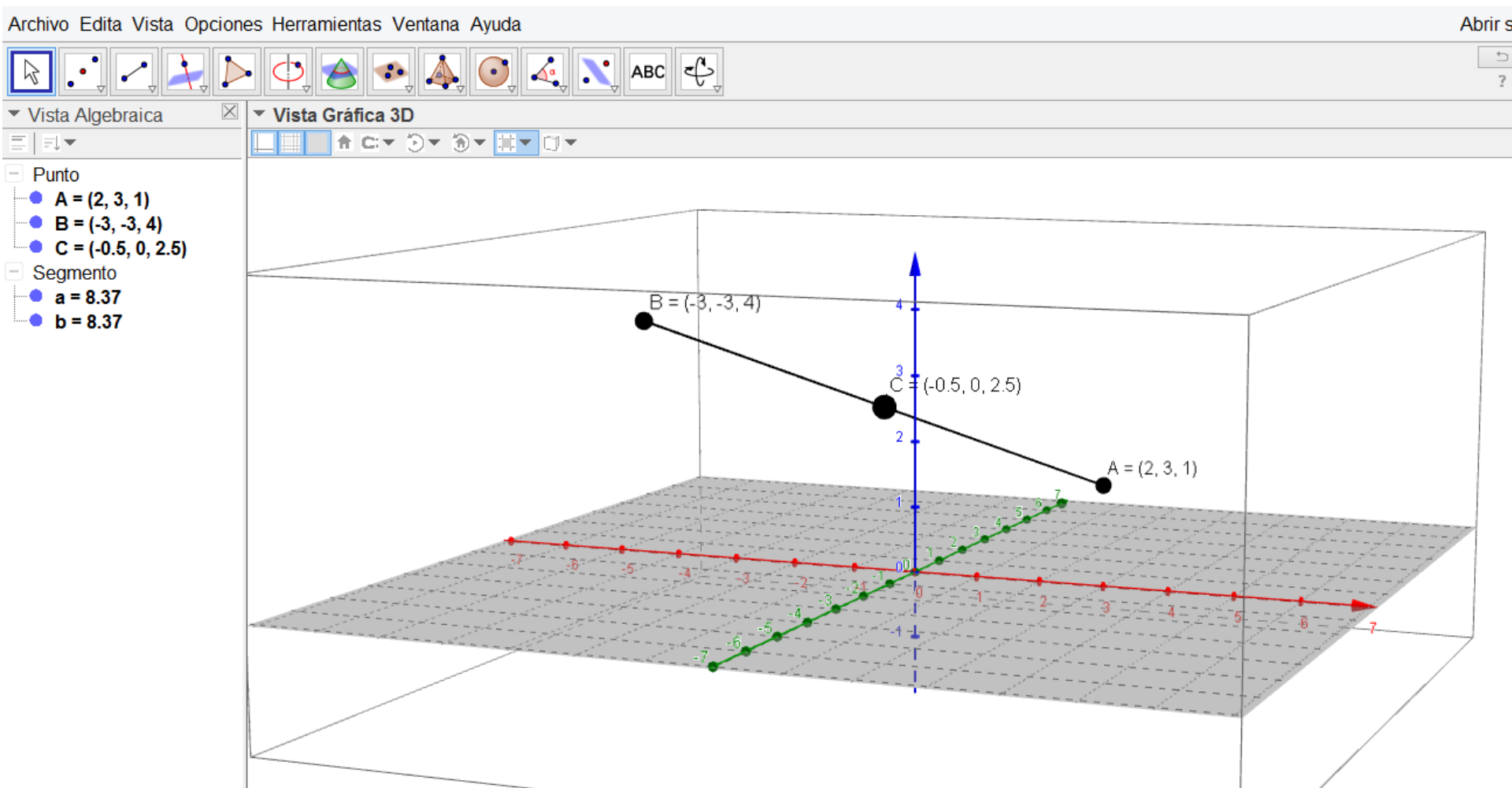
$$d = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-3 - 3)^2 + (4 - 1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-5)^2 + (6)^2 + (3)^2}$$

$$d = \sqrt{25 + 36 + 9}$$

$$d = \sqrt{70} = 8,37$$

2.1.2. PUNTO MEDIO



Entrada:

2.1.2. PUNTO MEDIO

$P_m(x_m; y_m; z_m)$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Punto

● $A = (2, 3, 1)$

● $B = (-3, -3, 4)$

● $C = (-0.5, 0, 2.5)$

$A (2; 3; 1)$

$x_1=2$

$y_1=3$

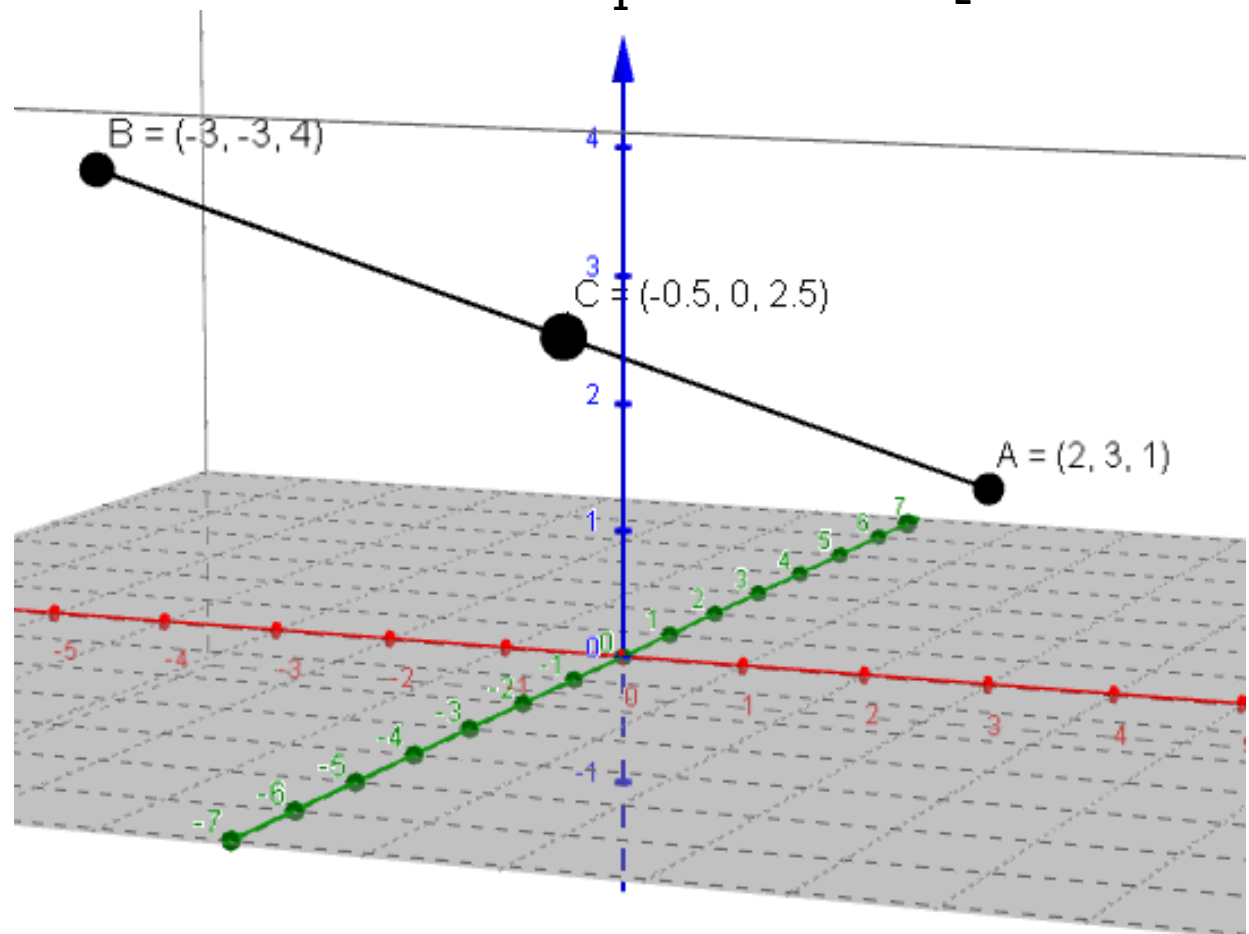
$z_1=1$

$B (-3; -3; 4)$

$x_2=-3$

$y_2=-3$

$z_2=4$



2.1.2. PUNTO MEDIO

Ejemplo:

Calcular las coordenadas del punto medio entre $P_1 (2; 3; 1)$ y $P_2 (-3; -3; 4)$

$P_1 (2; 3; 1)$

$x_1=2$

$y_1=3$

$z_1=1$

$P_2 (-3; -3; 4)$

$x_2=-3$

$y_2=-3$

$z_2=4$

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_m = \frac{2 + (-3)}{2}$$

$$x_m = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$y_m = \frac{3 + (-3)}{2}$$

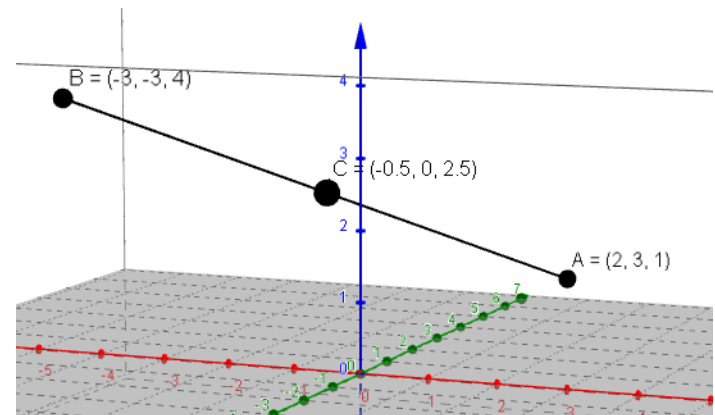
$$y_m = 0$$

$$z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

$$z_m = \frac{1 + 4}{2}$$

$$z_m = \frac{5}{2} = 2,5$$

$P_m (0,5; 0; 2,5)$



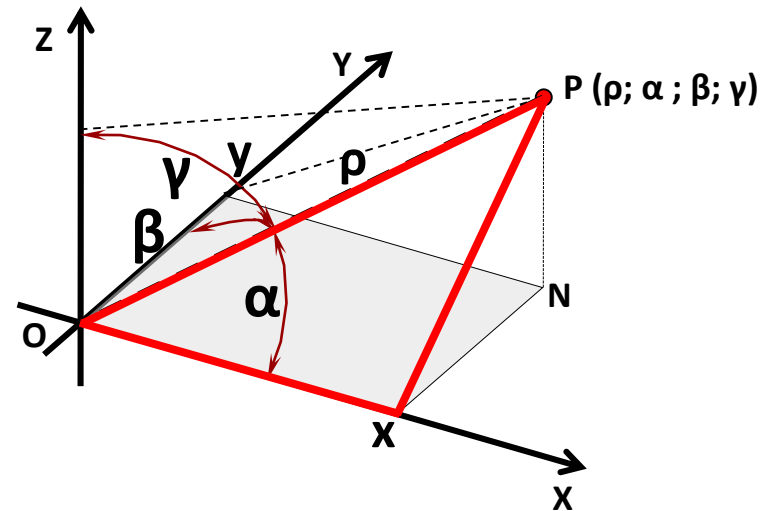
2.2. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Todo punto en el espacio queda definido a partir de
una distancia y tres ángulos
 $P(\rho; \alpha; \beta; \gamma)$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho} \quad x = \rho \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\rho} \quad y = \rho \cdot \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\rho} \quad z = \rho \cdot \cos \gamma$$



$P(\rho; \alpha; \beta; \gamma) \rightarrow P(x; y; z)$

2.2. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho} \longrightarrow$$

$$\alpha = \arccos \frac{x}{\rho}$$

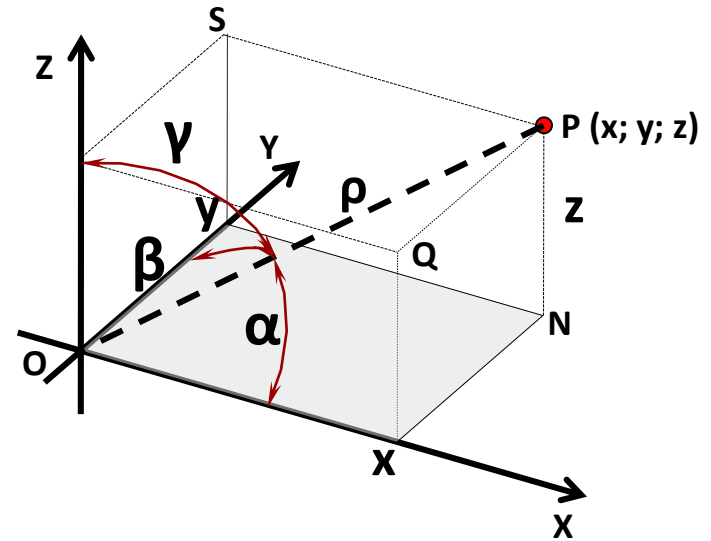
$$\cos \beta = \frac{y}{\rho} \longrightarrow$$

$$\beta = \arccos \frac{y}{\rho}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\rho} \longrightarrow$$

$$\gamma = \arccos \frac{z}{\rho}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



$P(x; y; z)$  $P(\rho; \alpha; \beta; \gamma)$

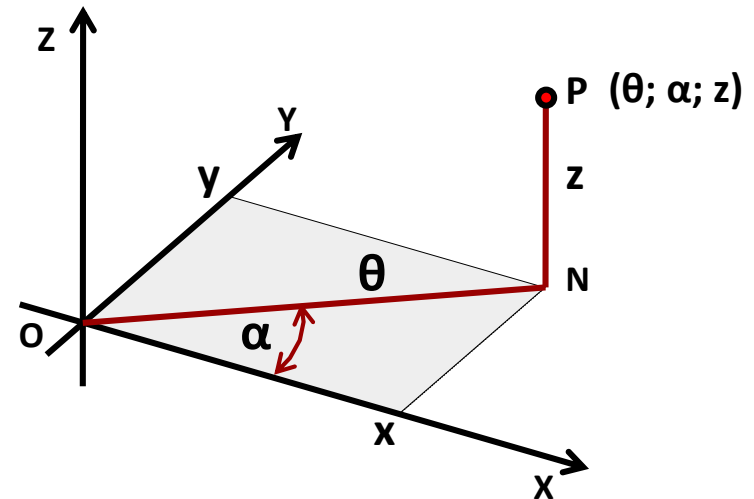
2.3. SISTEMAS DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

Todo punto en el espacio queda definido a partir de
dos distancias y un ángulo
 $P (\theta; \alpha; z)$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\theta} \longrightarrow x = \theta \cdot \cos \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{\theta} \longrightarrow y = \theta \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$z = z$$



$$P (\theta; \alpha; z) \longrightarrow P (x; y; z)$$

2.3. SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

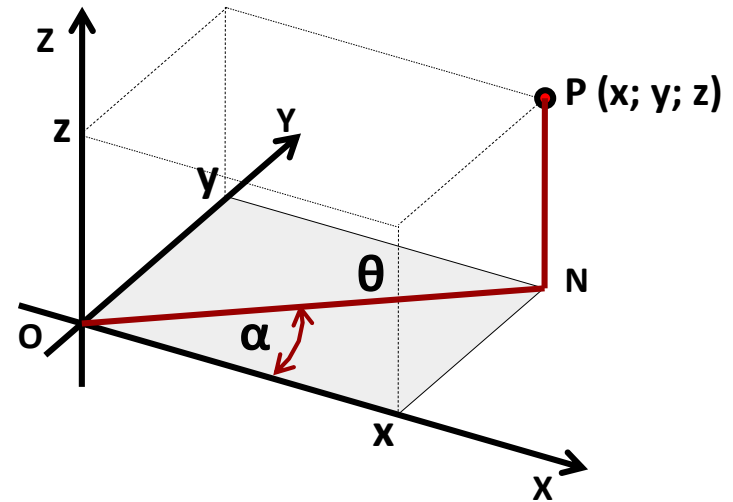
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \longrightarrow$$

$$\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

$$P(x; y; z) \longrightarrow P(\theta; \alpha; z)$$



2.4. SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

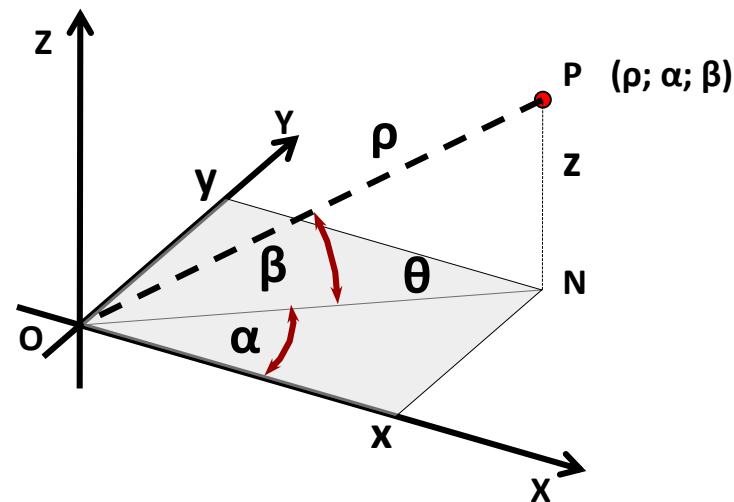
Todo punto en el espacio queda definido a partir de
una distancia y dos ángulos
 $P(\rho; \alpha; \beta)$

$$\begin{aligned}x &= \theta \cdot \cos \alpha \\y &= \theta \cdot \sin \alpha \\z &= \rho \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

$\theta = \rho \cdot \cos \beta$

$$\begin{aligned}x &= \rho \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \\y &= \rho \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha \\z &= \rho \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

$$P(\rho; \alpha; \beta) \longrightarrow P(x; y; z)$$



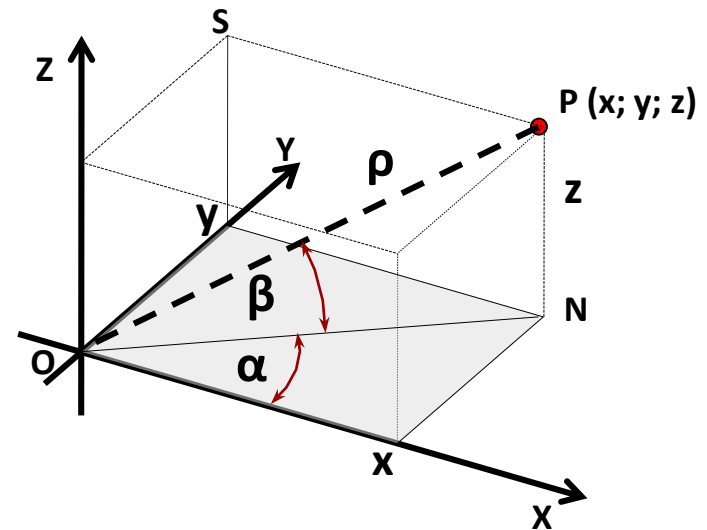
2.4. SISTEMA DE COORDENADAS ESFÉRICAS

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

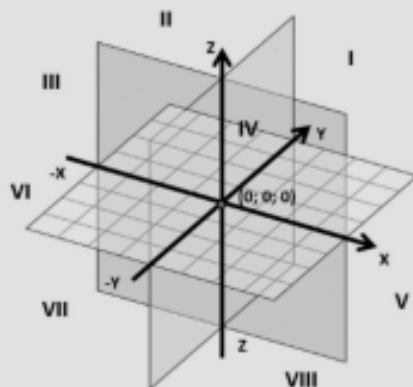
$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$\beta = \operatorname{arcsen} \frac{z}{\rho}$$

$P(x; y; z) \rightarrow P(\rho; \alpha; \beta)$



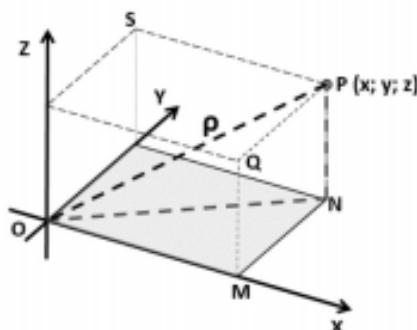
Sistemas de Coordenadas en el Espacio



Es un sistema de referencias compuesto por tres planos perpendiculares entre sí que dividen el espacio en ocho octantes y cuyas intersecciones dan origen a los tres ejes x, y, z . En este sistema, cualquier punto puede ser representado a partir de cuatro sistemas de coordenadas en el espacio

Coordenadas Rectangulares	$P(x; y; z)$
Coordenadas Polares	$P(\rho; \alpha; \beta; \gamma)$
Coordenadas Esféricas	$P(\rho; \alpha; z)$
Coordenadas Cilíndricas	$P(\theta; \alpha; z)$

COORDENADAS RECTANGULARES



Se plantean tres planos perpendiculares entre sí (o planos coordenados) de cuya intersección surgen ocho octantes y tres rectas numéricas (dos horizontales -ejes de abscisas y ordenadas, más uno vertical o eje "z") dispuestas a 90° . Así, cualquier punto resulta una terna ordenada $(x; y; z)$: un SISTEMA ESPACIAL, RECTANGULAR (90°), y TRIDIMENSIONAL.

Igualmente a lo visto en un sistema bidimensional, se pueden calcular distancias:

DISTANCIA (ρ) ENTRE EL PUNTO Y EL ORIGEN $(0; 0; 0)$ DEL SISTEMA

$$|d| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

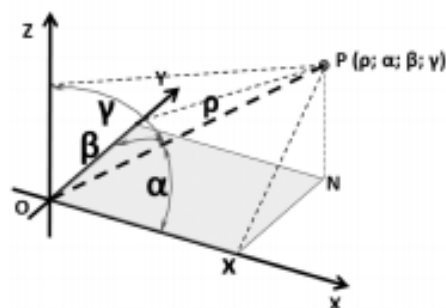
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS, $P_1(x_1; y_1; z_1)$ Y $P_2(x_2; y_2; z_2)$

$$|d| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

PUNTO MEDIO $P_m = (X_m; Y_m)$
DE ESE SEGMENTO

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

COORDENADAS POLARES



Un punto está representado desde un polo -origen del sistema $(0; 0; 0)$ - con una distancia " ρ ", pero con distintos ángulos directores respecto a cada eje:

" α " para " x ",
" β " para " y ",
" γ " para " z ".

En este sistema un punto se define por cuatro variables: una distancia y tres ángulos ($\rho; \alpha; \beta; \gamma$).

DE RECTANGULAR A POLAR

los datos son x, y, z ; se buscan ρ, α, β y γ

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \alpha = \arccos \frac{x}{\rho}$$

$$\beta = \arccos \frac{y}{\rho} \quad \gamma = \arccos \frac{z}{\rho}$$

DE POLAR A RECTANGULAR

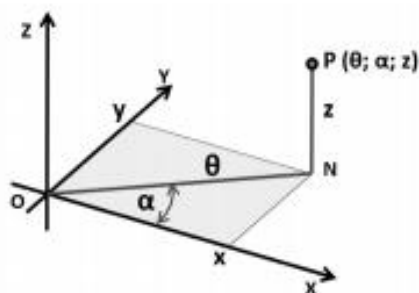
los datos son ρ, α, β y γ se buscan x, y, z

$$x = \rho \cdot \cos \alpha$$

$$y = \rho \cdot \cos \beta$$

$$z = \rho \cdot \cos \gamma$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS



Aquí un punto está representado desde un polo -origen del sistema (0; 0; 0)- con una distancia "θ" sobre el plano XY, un ángulo director sobre él "α", y la proyección de dicho punto sobre el plano XY "z". Es decir, dos distancias (θ y z) y una rotación (α). La terna resulta (θ; α; z).

DE RECTANGULAR A CILÍNDRICA

los datos son x, y, z; se buscan θ; α; z

$$\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

DE CILÍNDRICA A RECTANGULAR

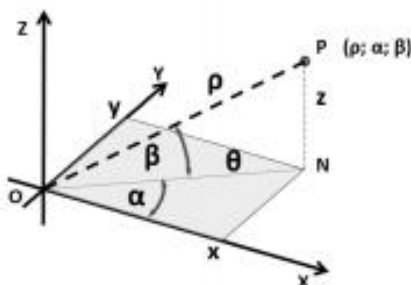
los datos son θ; α; z; se buscan x, y, z

$$x = \theta \cdot \cos \alpha$$

$$y = \theta \cdot \sin \alpha$$

$$z = z$$

COORDENADAS ESFÉRICAS



Cada punto está representado desde un polo -origen del sistema (0; 0; 0)- con una distancia "ρ" y dos ángulos sobre planos perpendiculares entre sí denominados "α" sobre el plano XY y "β" sobre un plano perpendicular al anterior que contiene a P. Es decir, una distancia (ρ) y dos rotaciones (α y β).

La terna resulta finalmente (ρ; α; β).

DE RECTANGULAR A ESFÉRICA

los datos son x, y, z; se buscan ρ; α; β

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\beta = \arcsen \frac{z}{\rho}$$

DE ESFÉRICA A RECTANGULAR

los datos son ρ; α; β; se buscan x, y, z

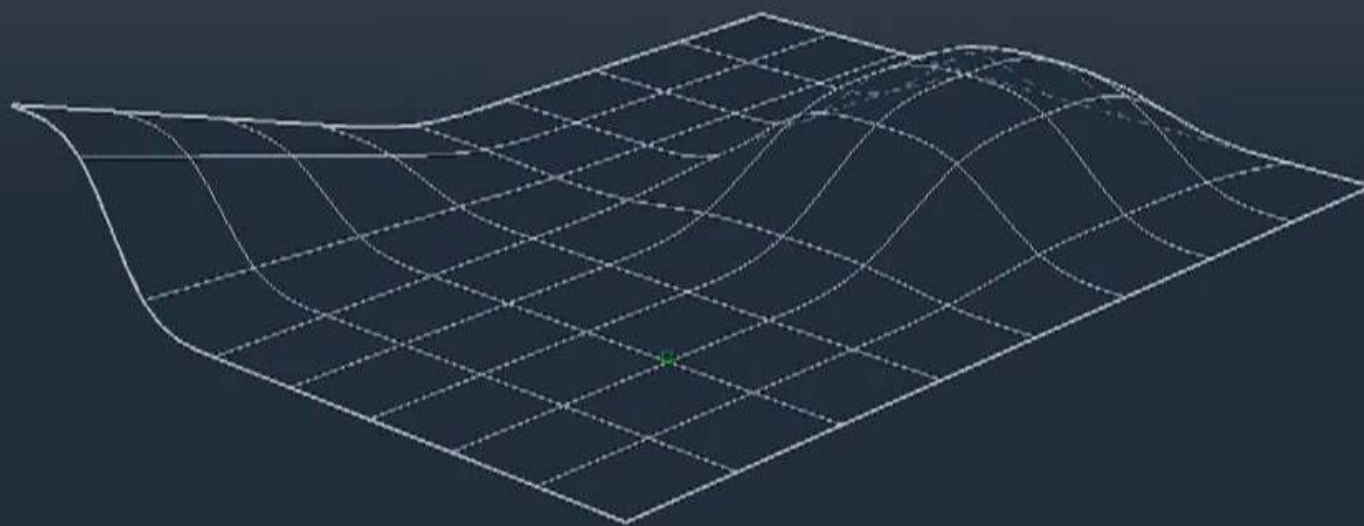
$$x = \rho \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha$$

$$y = \rho \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha$$

$$z = \rho \cdot \sin \beta$$

TABLA RESÚMEN DE PASAJES ENTRE SISTEMAS

RECTANGULARES A POLARES	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\alpha = \arccos \frac{x}{\rho}$ $\beta = \arccos \frac{y}{\rho}$ $\gamma = \arccos \frac{z}{\rho}$
RECTANGULARES A CILÍNDRICAS	$\theta = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\alpha = \arctg \frac{y}{x}$ $z = z$
RECTANGULARES A ESFÉRICAS	$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\alpha = \arctg \frac{y}{x}$ $\beta = \arcsen \frac{z}{\rho}$
POLARES A RECTANGULARES	$x = \rho \cdot \cos \alpha$ $y = \rho \cdot \cos \beta$ $z = \rho \cdot \cos \gamma$
CILÍNDRICAS A RECTANGULARES	$x = \theta \cdot \cos \alpha$ $y = \theta \cdot \sin \alpha$ $z = z$
ESFÉRICAS A RECTANGULARES	$x = \rho \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha$ $y = \rho \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha$ $z = \rho \cdot \sin \beta$



a trabajar sobre la guía!