

Expresiones Algebraicas Matemática I

F.A.U.D. U.N.C

1 – EXPRESIONES ALGEBRAICAS

En el lenguaje matemático, se denomina “**expresiones algebraicas**” a toda combinación de letras y/o números vinculados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación y potenciación de exponente racional. Para comprenderlo mejor, veamos los siguientes ejemplos:

- ♦ $3x^2 + 2x - 3$
- ♦ $5ab - a^{-2}$
- ♦ $\frac{\sqrt[4]{x+2} + y}{3x + 2y}$
- ♦ $(2m + \frac{2}{3}n - p)^3$

Toda expresión algebraica esta formada por caracteres alfabéticos, que representan a las variables, y números, que son coeficientes que acompañan a las variables. Una expresión algebraica puede estar formada por diferentes letras del alfabeto, ellas siempre representaran a las variables.

Las expresiones algebraicas están compuestas por términos. Un término es aquella cadena de letras y números separada por las operaciones de suma y de resta.

2 – CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresiones Algebraicas	Racionales	Enteras	Expresión algebraica donde las variables aparecen en el numerador y están afectadas sólo a exponentes naturales Ej.: $5x - 2$ $\frac{2}{3}m^2 + 2m - \frac{4}{5}$ $\sqrt{5} + 2n$
		Fraccionarias	Expresión algebraica donde al menos una variable está afectada a un exponente entero negativo (o figura en el denominador) Ej.: $(3x + 4,3)^{-2}$ $\frac{2x - 3}{x^2 - 4} + x^2 - 3$ $5x^{-2} + \frac{1}{2}x^2 + 2x$
	Irracionales		Expresión algebraica donde al menos una variable está afectada a un exponente fraccionario (o figura bajo un signo de radicación) Ej.: $(6m^2 - 2m)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6m^2 - 2m}$ $\sqrt[3]{a} + 2a^2 - \frac{1}{3} = a^{\frac{2}{3}} + 2a^2 - \frac{1}{3}$

3 – POLINOMIOS

Se denomina **polinomio** a toda expresión algebraica racional entera. Es decir que en él, la o las variables van a estar relacionadas por operaciones matemáticas tales como: suma, resta, multiplicación y potencia de exponente entero no negativo.

La expresión genérica de un polinomio de una sola variable (x), es:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

Donde:

- ♦ $a_i \in R$, y se denominan **coeficientes**
- ♦ $a_n \neq 0$, y se denomina **coeficiente principal**
- ♦ a_0 se denomina **termino independiente**

Ejemplos:

- ♦ $5x$
- ♦ $12x^2 + \frac{1}{2}x - \sqrt{5}$
- ♦ $\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + x - \frac{1}{5}$

Monomios

Se denomina **monomio** a toda expresión algebraica entera de un solo término, es decir que en ella no intervienen operaciones de suma ni resta.

Ejemplos:

- ♦ $4mn^2$
- ♦ $-3pql^3$
- ♦ $\frac{2}{5}x^2y$

Coeficiente de un Monomio

Se denomina **coeficiente de un monomio** al número real que precede a dicha expresión. Si nos fijamos en los ejemplos anteriores, podemos decir que en:

- ♦ $4m^4n^2 \rightarrow 4$ es el coeficiente,
- ♦ $-3pql^3 \rightarrow -3$ es el coeficiente,
- ♦ $\frac{2}{5}x^2y \rightarrow \frac{2}{5}$ es el coeficiente.

Monomios Semejantes

Cuando dos monomios tienen las mismas variables con los mismos exponentes, decimos que éstos son **semejantes**. O sea, sólo pueden diferir sus coeficientes.

Ejemplos:

- ♦ $3m^3n$
- ♦ $-4m^3n$
- ♦ $\frac{3}{2}m^3n$

Grado de un Monomio

El **grado de un monomio** queda determinado por la suma de los exponentes de las variables que lo componen. Así, tomando ejemplos anteriores, podemos decir que:

$$\blacklozenge 4m^4n^2 \rightarrow \text{es de } 6^\circ \text{ grado,}$$

$$\blacklozenge -3pql^3 \rightarrow \text{es de } 5^\circ \text{ grado,}$$

$$\blacklozenge \frac{2}{5}x^2y \rightarrow \text{es de } 3^\circ \text{ grado.}$$

Grado de un Polinomio

Dado que un polinomio está formado por dos o más monomios, el **grado de un polinomio** se corresponderá con el monomio de mayor grado que lo componga. El grado de un polinomio se simboliza: $gr[P(x)]$.

Ejemplos:

$$\blacklozenge P(x) = 3x^5 + 2x^3 - 5x \quad gr[P(x)] = 5$$

$$\blacklozenge Q(m) = 5m^3 + 2m - 3m^4 \quad gr[Q(m)] = 4$$

$$\blacklozenge R(p) = \frac{1}{2}p^2 - 2p^3 + 3p \quad gr[R(p)] = 3$$

Polinomio Homogéneo

Se denomina **polinomio homogéneo** a aquel que mantiene el mismo grado en todos los términos que lo componen, en forma independiente de las variables que integran dicho término.

Ejemplos:

$$\blacklozenge 3x^3y - 5p^2q^2 + 2zpq^2 \rightarrow \text{es un polinomio homogéneo de } 5^\circ \text{ grado}$$

$$\blacklozenge 5y^2 + 2xy - x^2 \rightarrow \text{es un polinomio homogéneo de } 2^\circ \text{ grado}$$

$$\blacklozenge mnp - m^2q \rightarrow \text{es un polinomio homogéneo de } 3^\circ \text{ grado}$$

Polinomio Ordenado

Decimos que un polinomio está **ordenado** respecto de una **variable ordenatriz** cuando todos sus términos están dispuestos en forma creciente o decreciente respecto del exponente de dicha **variable ordenatriz**.

Ejemplos:

$$\blacklozenge \frac{3}{2}x^3 - 2x^2 + 5x + 3 \quad \text{polinomio ordenado en forma descendente (en } x)$$

$$\blacklozenge -3n^2 + 4an^4 - 7a^3n^6 \quad \text{polinomio ordenado en forma ascendente (en } a)$$

$$\blacklozenge y^2 - 3ay + a \quad \text{polinomio ordenado en forma descendente (en } y)$$

Polinomio Completo

Se dice que un polinomio está **completo** cuando contiene términos de todos los grados según la variable ordenatriz, desde el de mayor grado hasta el de **grado cero**.

Si un polinomio esta incompleto, se puede completar los términos faltantes con **coeficiente cero**

Ejemplos:

- ♦ $5m^3 - 2m^2 + 3m - \frac{4}{5}$ **polinomio completo** y ordenado en forma descendente.
- ♦ $2ax^2 + 3bx - 6$ **polinomio completo** y ordenado en forma descendente.
- ♦ $-\frac{2}{3} - 4p + p^2$ **polinomio completo** y ordenado en forma ascendente.
- ♦ $5p^3 + 2p - 1$ **polinomio incompleto** y ordenado en forma descendente.
- ♦ $5p^3 + 0p^2 + 2p - 1$ **polinomio completo** y ordenado en forma descendente.

Polinomio Opuesto

Dado un polinomio, se dice su **polinomio opuesto** es aquel que sólo difiere en el signo de los coeficientes que lo componen.

Ejemplo:

- ♦ $P(x) = 5x^2 - 3x + 9$;
su **polinomio opuesto** será: $Q(x) = -5x^2 + 3x - 9$
- ♦ $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + x - 6$;
su **polinomio opuesto** será: $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$

Igualdad de Polinomios

Se dice que dos polinomios son **iguales** cuando tiene el mismo grado y los mismos coeficientes en los términos semejantes. En forma genérica, podemos escribirlo de la siguiente manera:

Sean los polinomios de una sola variable:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$$

$$Q(x) = b_n \cdot x^n + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + b_1 \cdot x^1 + b_0$$

Se dice que $P(x) = Q(x) \Leftrightarrow [gr(P) = gr(Q) \text{ y } a = b_i \text{ con } i = 0; 1; 2; \dots; n]$

Ejemplo:

- ♦ Si $P(x) = -3x^2 + 5x - 2$, para que $Q(x) = mx^2 + nx + p$ sea su igual: sus coeficientes deben ser: $m = -3$; $n = 5$ y $p = -2$

Polinomio Nulo

Se dice que un polinomio es **nulo** si todos sus coeficientes son nulos. Se simboliza con 0. El polinomio nulo no tiene grado. En símbolos sería:

$$0 = 0x^0 = 0x^1 + 0 = 0x^2 + 0x^1 + 0 = \dots$$

4 – VALOR NUMÉRICO DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El valor numérico de una expresión algebraica es el número real que se obtiene al reemplazar a las variables que interviene en la expresión por números reales determinados y luego de realizar las operaciones indicadas, siempre que sean posibles.

Ejemplos:

$$\blacklozenge \quad 3x^3 - 6x^2 + 2 \quad \text{para } x = \frac{2}{3} \quad 3.\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6.\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{2}{9}$$

el valor numérico para $x = \frac{2}{3}$ es igual a $\frac{2}{9}$

$$\blacklozenge \quad \frac{4x^2 - 2x + 3}{x - 2} \quad \text{esta expresión algebraica racional entera tiene solución para cualquier valor que le demos a "x" menos para cuando es } x = 2, \text{ dado que no es posible resolver un cociente con denominador igual a "0" ó nullo.}$$

5 – RAICES DE UN POLINOMIO

Un caso particular del valor numérico de una expresión algebraica, es cuando dado un valor a la variable, esta resulta igual a 0 (cero), a este valor de la variable es el que denominamos raíz del polinomio.

En resumen podemos decir: que un número real a es raíz, o cero, del polinomio $P(x)$ sí y sólo sí se verifica que $P(a) = 0$

Ejemplos:

$$\blacklozenge \quad P(x) = 2x - 1 \quad \text{para } x = \frac{1}{2} \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

el valor numérico para $x = \frac{1}{2}$ es igual a 0; por lo tanto $x = \frac{1}{2}$ es raíz del polinomio

$$\blacklozenge \quad P(x) = x^2 - 2 \quad \text{para } x = \sqrt{2}, \text{ o para } x = -\sqrt{2},$$

$$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 0 \quad \text{y} \quad P(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 - 2 = 0$$

se verifica que $P(\sqrt{2}) = 0$ y que $P(-\sqrt{2}) = 0$, por lo tanto ambas son raíces, o cero, del polinomio.

Los polinomios no siempre cuentan con valores que satisfagan $P(a) = 0$; en tal caso se dice que no existen raíces reales para el polinomio.

Ejemplo:

$$\blacklozenge \quad P(x) = x^2 + 2 \quad \text{si desarrollamos, vemos que: } x^2 = -2; \text{ y como vimos con anterioridad esto no tiene solución dentro del conjunto de números reales porque su valor no se encuentra sobre la recta en la que se representan estos valores.}$$

6 – IGUALDADES, IDENTIDAD Y ECUACIONES

Igualdades

Decimos que está planteada una **igualdad** entre dos expresiones matemáticas cuando ambas alcanzan un mismo valor numérico. Es decir que se establece una relación de equivalencia entre ellas.

Ejemplos:

$$\blacklozenge (x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$$

$$\blacklozenge x^2 = 2x + 5$$

Identidad

Decimos que existe una relación de **identidad** cuando la igualdad planteada se satisface para todos los valores posibles que puede alcanzar la(s) variable(s) de cada una de las expresiones consideradas.

Ejemplos:

$$\blacklozenge (x + 3) \cdot (x - 3) = x^2 - 9; \text{ es una } \textbf{identidad}, \text{ pues se verifica para cualquier valor que se le asigne a "x"}$$