

Sistemas de Ecuaciones Matemática I

F.A.U.D. U.N.C

Ecuaciones

Denominamos **ecuación** a la igualdad que se satisface para uno o más valores de la(s) variable(s), o incógnita(s), que interviene en ella.

Ejemplos:

- ♦ $2x + 1 = 5$
- ♦ $x^2 + 5x + 6 = 0$
- ♦ $x + y = 10$

Denominamos **ecuación algebraica** a toda ecuación del tipo:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0$$

en la que **n** es el grado de la ecuación, **x** representa a la variable (o incógnita) y los factores en **a** son números reales.

Cuando la ecuación se verifica para **algunos** valores del conjunto de todos los valores posibles que admite la variable denominamos a esta como **ecuación compatible determinada**.

Ejemplos:

- ♦ $3x - 2 = 0$ es una ecuación compatible determinada por que sólo se verifica la igualdad para: $x = \frac{2}{3}$
- ♦ $x^2 = 2x + 15$ es una ecuación compatible determinada por que sólo se verifica la igualdad para: $x = 5$ y $x = -3$
- ♦ $x^3 - x = 0$ es una ecuación compatible determinada por que sólo se verifica la igualdad para: $x = 1$; $x = 0$ y $x = -1$

El conjunto formado por los valores que verifican la igualdad se denomina conjunto solución de la ecuación. Cada valor, o elemento, de dicho conjunto se denomina **raíz** de la ecuación.

Si ocurriera que ningún valor satisface la ecuación planteada, denominamos a esta como **ecuación incompatible**.

Ejemplo:

- ♦ $|x| = -2$ es una **ecuación incompatible**, pues no se verifica para ningún valor

EJERCICIOS:

1) Resolver las siguientes ecuaciones e indicar su conjunto solución:

1. $\frac{2x-3}{x+2} - \frac{4x^2+5x-8}{x^2-4} = \frac{1-3x}{x-2}$

2. $\frac{x}{x+2} = \frac{2}{x-1} + 2$

$$3. -\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0$$

$$4. \left(\frac{6}{x-1}\right)^2 + 4 = 5 \cdot \left(\frac{6}{x-1}\right)$$

$$5. \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right) = -6$$

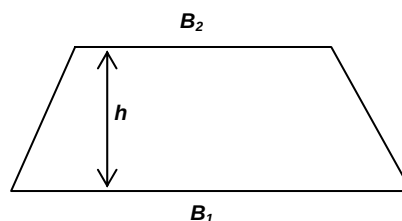
$$6. 2 \cdot \left(\frac{x-2}{3-x}\right) + \left(\frac{3-x}{x-2}\right) = 3$$

2) Dar respuesta a los siguientes enunciados:

1. La suma de 3 números consecutivos es igual a 126. ¿Cuáles son esos números? (Simbólicamente los números consecutivos son: x ; $x+1$ y $x+2$)
2. La suma de dos múltiplos consecutivos de 6 es igual a 66. ¿Cuáles son esos números?
3. En un aula con 92 alumnos, entre varones y mujeres. Si hay 16 varones más que mujeres. ¿Cuántos alumnos hay de cada uno?
4. Tres alumnos de un curso han resuelto 42 ejercicios en total. El alumno A resolvió $n+3$ ejercicios, B resolvió $4n-5$ ejercicios y C realizó $3n+4$. ¿Cuántos ejercicios resolvió cada uno?
5. El promedio de las calificaciones de dos alumnos es de 7,50 puntos. Si la calificación de uno de ellos es un cuarto de la del otro más cinco ¿Qué calificación tiene cada uno de ellos?
6. De cuatro amigos: **A**, **B**, **C** y **D**; **A** tiene x hermanos, **B** tiene $2x$, **C** tiene $2x+1$ y **D**: $3x-6$. Se sabe además, que uno de ellos es hijo único. ¿Cuántos hermanos tienen los demás?
7. De una ruta se han inaugurado $\frac{1}{3}$ de su longitud; $\frac{1}{4}$ de la misma está en construcción y quedan aún por construir 120 Km. ¿Cuál es la longitud total de la ruta?
8. La base mayor de un trapecio es el doble de la otra y la altura del trapecio es de 12,5 m. ¿Cuánto mide cada una de las bases si la superficie de la figura es $75,00 \text{ m}^2$?
9. En un terreno triangular ABC de 52,00 m de perímetro, el lado **b** es $\frac{2}{3}$ del lado **a** y el lado **c** es 3,00 m más largo que el lado **b**. Calcular la longitud de cada lado.

10. El área de una plaza, con forma de rombo, es de $2401, - m^2$. Una de sus diagonales $D_1 = 49, - m$ ¿Cuál es la longitud de la diagonal D_2 ? ¿Qué puedes decir del rombo?

11. Calcular la base menor (B_2)
 Base mayor = $10,80 m$ (B_1)
 altura = $15,00 m$ (h)
 Área = $112,50 m^2$



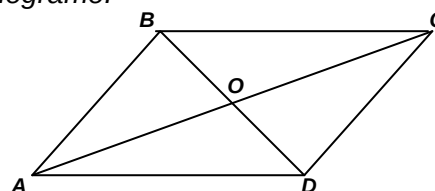
12. Hallar la base y la altura de un rectángulo, sabiendo que la altura es la mitad de la base y el área de su superficie es de $32,00 m$.

13. Hallar la longitud de las diagonales del paralelogramo.

$$\overline{AO} = 2x + 2$$

$$\overline{BO} = 4x - 5$$

$$\overline{CO} = 5x - 4$$

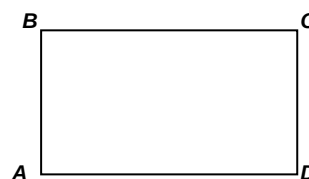


14. Calcular $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ siendo **ABCD** un rectángulo

$$\overline{AB} = \frac{8}{5}x - 5,5$$

$$\overline{CD} = -0,4x + \frac{1}{2}$$

(¿tiene solución?)

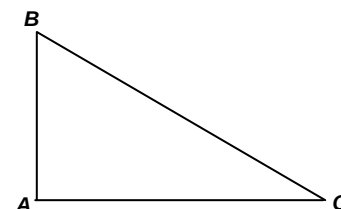


15. Calcular la longitud de los catetos y de la hipotenusa

$$\overline{AB} = x + 1$$

$$\overline{AC} = x + 2$$

$$\overline{BC}^2 = 2x^2 + 17$$



7 – SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones de Primer Grado con dos Incógnitas

Ya hemos visto que:

Si $P(x)$ es un polinomio con una variable indeterminada, la expresión:

$P(x) = 0$; es una ecuación con una incógnita.

Si además, $P(x)$ es un polinomio de primer grado, entonces resulta:

$P(x) = 0$; es una ecuación de primer grado con una incógnita.

Ejemplo:

$$2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{3\}$$

La ecuación de primer grado con una incógnita tiene una sola raíz. El conjunto solución es unitario.

Consideramos ahora el polinomio $P(x; y)$ con dos variables indeterminadas.

$P(x; y) = 0$ es una ecuación de dos incógnitas.

Si en particular, $P(x; y)$ es un polinomio de primer grado, entonces la expresión:

$P(x; y) = 0$ es una **ecuación de primer grado con dos incógnitas**.

Si convertimos a dicha ecuación en: $y = P(x)$; cada par ordenado $(x; y)$ que verifique la igualdad planteada, será una raíz de la ecuación.

Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado con dos Incógnitas

Se denomina **sistema de ecuaciones**, cuando se considera un conjunto de dos o más ecuaciones cuyas raíces son comunes.

Al conjunto de dos ecuaciones $P(x; y) = 0$ y $Q(x; y) = 0$ se llama sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si ambas ecuaciones son de primer grado, decimos que es un **sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas**. Para indicar que forman un sistema se abarcan con una llave.

Ejemplo:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x; y) = 0 \\ Q(x; y) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x + y - 9 = 0 \end{array} \right.$$

Métodos para Resolución de Sistemas de Ecuaciones de Primer Grado con dos Incógnitas

Existen diversos métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. La representación gráfica de las ecuaciones constituye uno de los procedimientos para encontrar el conjunto solución.

Alguno de los métodos algebraicos más usuales para la resolución de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, son:

- ♦ **Método de Sustitución**
- ♦ **Método de Igualación**
- ♦ **Método de Reducción por Suma o Resta**
- ♦ **Método de Determinantes**

Cualquiera sea el método que se utilice, generalmente se procede de la siguiente manera:

1. **Se elimina una de las incógnitas** para transformar el sistema de dos ecuaciones de con dos incógnitas en una ecuación de primer grado con una incógnita.
2. **Se resuelve la ecuación de primer grado** con una incógnita por alguno de los métodos conocidos.
3. **Se reemplaza la raíz hallada** en una de las ecuaciones del sistema y la expresión resultante permite calcular la otra incógnita.

A continuación veremos como se resuelven estos sistemas de ecuaciones con cada uno de los métodos enunciados previamente.

Método de Sustitución

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

1. Despejamos y en la primera ecuación:

$$y = -4x + 4 \quad (1)$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación: $2x - 3y = -5$

$$2x - 3 \cdot (-4x + 4) = -5$$

De esta manera, **por sustitución**, nos queda una ecuación de primer grado con una incógnita.

2. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$2x + 12x - 12 = -5$$

$$14x = 7$$

$$x = \frac{1}{2}$$

3. Reemplazamos el valor de x en la igualdad (1):

$$y = -4x + 4$$

$$y = -4 \cdot \frac{1}{2} + 4$$

$$y = -2 + 4$$

$$y = 2$$

Conjunto Solución del sistema: $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; 2\right)\right\}$

Observación:

Si alguna de las incógnitas carece de coeficiente, conviene despejar esta incógnita, porque evitamos los denominadores. Pruebe hacerlo despejando y en la primera ecuación.

Ejercicios:

$$a \begin{cases} x - 3y = -3 \\ \frac{1}{3}x + y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b & 3x + y - 1 = 0 \\ & -y = 2x - 4 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} 2x - 4y - 3 = 0 \\ 3x = -y - \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$d \begin{cases} -3x - 4y = -7 \\ -x - 2y = 2 \end{cases}$$

Método de Igualación

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

1. Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$\text{De la primera:} \quad x = \frac{4 - y}{4} \quad (2)$$

$$\text{De la segunda:} \quad x = \frac{-5 + 3y}{2} \quad (3)$$

Igualemos los dos valores de x :

$$\frac{4 - y}{4} = \frac{-5 + 3y}{2}$$

De esta manera, por igualación, obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita.

2. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$8 - 2y = -20 + 12y$$

$$14y = 28$$

$$y = 2$$

3. Reemplazamos el valor de y en la igualdad (2) (o en la (3)):

$$x = \frac{4 - 2}{4}$$

$$x = \frac{-5 + 6}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Conjunto Solución del sistema: $S = \{(\frac{1}{2}; 2)\}$

Ejercicios:

$$a \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 5x + 3y = -5 \end{cases}$$

$$b \begin{cases} x + 6y = -1 \\ 2x + 2y = -7 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} x + 3y = -\frac{4}{5} \\ 2x + y = -\frac{18}{5} \end{cases}$$

$$d \begin{cases} 4x - 2y = 7 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases}$$

Método de Reducción por Suma o Resta

a) Sea el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x - 3y = -7 \end{cases}$$

1. Es fácil ver que puede eliminarse la incógnita x sumando miembro a miembro

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x - 3y = -7 \end{cases}$$

$$-y = -3$$

Se obtiene así una ecuación de primer grado en y

2. Resolvemos:

$$y = 3$$

3. Reemplazamos y en la primera ecuación (o en la segunda)

$$x + 2 \cdot 3 = 4$$

$$-x - 3 \cdot 3 = -7$$

$$x = 4 - 6$$

$$-x = -7 + 9$$

$$x = -2$$

$$x = -2$$

Conjunto Solución del sistema: $S = \{(-2; 3)\}$

b) Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

1. Es fácil ver que puede eliminarse la incógnita y restando miembro a miembro.
Para restar las dos ecuaciones, sumamos a la primera el opuesto de la segunda.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ -x - 3y = -1 \end{cases}$$

$$2x = 8$$

Se obtiene así una ecuación de primer grado en x

2. Resolvemos:

$$x = 4$$

3. Reemplazamos x en la primera ecuación (o en la segunda)

$$3 \cdot 4 + 3y = 9$$

$$4 + 3y = 1$$

$$12 + 3y = 9$$

$$y = \frac{9-12}{3}$$

$$y = \frac{1-4}{3}$$

$$y = -1$$

$$y = -1$$

Conjunto Solución del sistema: $S = \{(4; -1)\}$

- c) Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$$

Si se quiere eliminar una incógnita, se debe lograr que sus coeficientes sean números opuestos.

1. Para eliminar x ; se multiplica la primera ecuación por -2

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{por } -2 \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 2y = -2 \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$$

$$-5y = 15$$

Observamos una ecuación de primer grado en y

2. Resolvemos:

$$y = \frac{15}{-5}$$

$$y = -3$$

3. Reemplazamos y en la primera ecuación (0 en la segunda)

$$2x + (-3) = 1$$

$$x = \frac{1+3}{2}$$

$$x = 2$$

Conjunto Solución del sistema: $S = \{(2;-3)\}$

d) Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$$

Si ahora queremos eliminar y debemos lograr que sus coeficientes sean números opuestos

1. Para eliminar y multiplicamos la primera ecuación por 3

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{por 3} \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 3 \\ 4x - 3y = 17 \end{cases}$$
$$\underline{\hspace{1cm}}$$
$$10x = 20$$

Obtenemos así una ecuación de primer grado en x

2. Resolvemos:

$$x = \frac{20}{10}$$

$$x = 2$$

3. Reemplazamos x en la primera ecuación

$$2 \cdot 2 + y = 1$$

$$y = 1 - 4$$

$$y = -3$$

Conjunto Solución del sistema: $S = \{(2;-3)\}$

d) Sea el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y = -12 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$$

Si pretendemos eliminar x no existe un número natural que multiplicado por 2 sea igual a 3

1. En este caso multiplicamos la primera ecuación por 3 (coeficiente de x en la segunda) y la segunda ecuación por -2 (coeficiente de x , cambiado de signo, en la primera) para poder reducir

$$\begin{cases} 2x - 2y = -12 & \text{por 3} \\ 3x + 5y = 6 & \text{por -2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 6y = -36 \\ -6x - 10y = -12 \end{cases}$$

$$-16y = -48$$

Obtenemos una ecuación de primer grado en y

2. Resolvemos:

$$y = \frac{-48}{-16}$$

$$y = 3$$

3. Reemplazamos y en la primera ecuación (o en la segunda)

$$2x - 2 \cdot 3 = -12$$

$$2x - 6 = -12$$

$$x = \frac{-12 + 6}{2}$$

$$x = -3$$

Conjunto Solución del sistema: $S = \{(-3;3)\}$

Observación:

Con un procedimiento similar, se podría eliminar y , y calcular en base a x .

Ejercicios:

$$a \begin{cases} x + 5y = 15 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$d \begin{cases} 4x - 6y = -6 \\ 8x + 3y = -7 \end{cases}$$

$$b \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 4x + y = 11 \end{cases}$$

$$e \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 3x + 3y = -12 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - 4y = -8 \end{cases}$$

$$f \begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x + 7y = -1 \end{cases}$$

Método de Determinantes

A los métodos de **eliminación** de una incógnita se agrega un nuevo método para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Consideremos un sistema expresado en forma general y tratemos de encontrar los valores de x y de y por el método de educación pro suma o resta.

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

1. Para obtener una ecuación de primer grado en x eliminamos y , multiplicando la primera ecuación por b_2 y la segunda por $-b_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{por } b_2 \\ \text{por } -b_1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -c_2b_1 \end{array} \right. \\ \hline a_1b_2x - a_2b_1x = c_1b_2 - c_2b_1$$

Resolvemos la ecuación de primer grado en x

$$x \cdot (a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$\boxed{x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}} \quad (1)$$

2. Para obtener una ecuación de primer grado en y eliminamos x , multiplicando la primera ecuación por a_2 y la segunda por $-a_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{por } a_2 \\ \text{por } -a_1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1a_2x + b_1a_2y = c_1a_2 \\ -a_1a_2x - b_2a_1y = -c_2a_1 \end{array} \right. \\ \hline b_1a_2y - b_2a_1y = c_1a_2 - c_2a_1$$

Resolvemos la ecuación de primer grado en y

$$y \cdot (b_1a_2 - b_2a_1) = c_1a_2 - c_2a_1$$

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{b_1a_2 - b_2a_1}$$

Si se comparan los denominadores de x y de y se nota que son opuestos. Para obtener denominadores iguales, multiplicamos numerador y denominador por -1 y ordenamos los términos.

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (2)$$

Desarrollaremos ahora un nuevo algoritmo muy útil para resolver sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Se plantea una diferencia de dos productos de dos factores:

$$a \cdot d - b \cdot c$$

Se esquematiza de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

El **determinante** es el producto de los números de la **diagonal principal** (en línea de trazos) menos el producto de los números de la otra diagonal (en línea continua).

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

En consecuencia, los numeradores y denominadores de las expresiones (1) y (2) que dan los valores de x y de y pueden expresarse como un cociente de determinantes.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (1)$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad (2)$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Observación:

- ♦ El denominador es el determinante formado por los coeficientes de x y de y . (Lo llamamos **D**)
- ♦ El numerador de x se obtiene reemplazando en **D**, los coeficientes de x por los términos independientes c_1 y c_2
- ♦ El numerador de y se obtiene reemplazando en **D**, los coeficientes de y por los términos independientes c_1 y c_2

Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 2x - 3y = -5 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 = -14$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{4 \cdot (-3) - (-5) \cdot 1}{-14} = \frac{-7}{-14} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{4 \cdot (-5) - 2 \cdot 4}{-14} = \frac{-28}{-14} \quad y = 2$$

Conjunto Solución del sistema: $S = \{(\frac{1}{2}; 2)\}$

Ejercicios:

$$a \begin{cases} 4x + y = 3 \\ -3x + \frac{1}{2}y = 4 \end{cases}$$

$$b \begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ x + 5y = 4 \end{cases}$$

$$c \begin{cases} -2x - y = -\frac{1}{3} \\ 5x + \frac{1}{3}y = 3 \end{cases}$$

$$d \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$$