

# SISTEMAS DE ECUACIONES

Ecuación es una igualdad que contiene por lo menos una incógnita, que se representa por medio de una letra, cuyo valor se debe averiguar.

Por ejemplo:  $3x + 2 = 4$  donde debemos calcular el valor de la incógnita “x”.

La solución de la misma no ofrece dificultades, ya que para averiguar el valor de “x” simplemente despejamos:  $x = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$

Luego, si reemplazamos a “x” por el valor hallado, la ecuación se “verifica”:

Así:  $3 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 4 \Rightarrow \frac{6}{3} + 2 = 4 \Rightarrow 2 + 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$  (verifica)

A menudo nos encontramos con ecuaciones en las cuales tenemos dos incógnitas, habitualmente representadas por “x” e “y”, aunque podría ser cualquier letra. Resolver estas ecuaciones, si bien no es complicado, no es tan sencillo como el caso anterior. En estos casos se las asocia con una segunda ecuación, por lo que tendremos un **“sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas”**.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas consiste en calcular valores para las variables “x” e “y” que satisfagan ambas ecuaciones. Esto es que verifiquen ambas ecuaciones.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas podemos utilizar uno de los siguientes métodos:

1. Sustitución
2. Igualación
3. Reducción
4. Determinantes

## RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Sea el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

Primero en una de las ecuaciones se halla el valor de una de las incógnitas. Hallemos la **y** en la primera ecuación supuesto conocido el valor de **x**

$$y = 11 - 3x$$

Se sustituye en la otra ecuación el valor anteriormente hallado

$$5x - (11 - 3x) = 13$$

Ahora tenemos una ecuación con una sólo incógnita; la resolvemos

$$5x - 11 + 3x = 13$$

$$5x + 3x = 13 + 11$$

$$8x = 24$$

$$x = 3$$

Ya conocido el valor de x lo sustituimos en la expresión del valor de y que obtuvimos a partir de la primera ecuación del sistema

$$y = 11 - 3x$$

$$y = 11 - 9$$

$$y = 2$$

Así la solución al sistema de ecuaciones propuesto será **x=3** e **y=2**

## **RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE IGUALACIÓN**

Sea el sistema 
$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

Lo primero que haremos será despejar en las dos ecuaciones la misma incógnita

$$\begin{cases} y = 11 - 3x \\ y = -13 + 5x \end{cases}$$

Igualamos ambas ecuaciones

$$11-3x=-13+5x$$

$$8x=24$$

$$x=3$$

Este valor de x lo sustituimos en cualquiera de las ecuaciones de y

$$y=11-9$$

$$y=2$$

### **RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE REDUCCIÓN**

Sea el sistema 
$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 5x - y = 13 \end{cases}$$

Sumaremos miembro a miembro las dos ecuaciones que componen el sistema

$$3x + y = 11$$

$$5x - y = 13$$

$$\hline 8x + 0 = 24$$

$$8x=24$$

x=3 y sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema obtenemos  
y=2

Por lo general este caso no se da en forma tan sencilla, ya que no es habitual que se puedan restar directamente para anular una de las incógnitas, sino que se deben igualar los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones, multiplicando convenientemente, obteniendo un “sistema equivalente” al dado, para luego sumar o restar ambas ecuaciones para eliminar dicha incógnita:

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Pasos a seguir:

1) Se igualan los coeficientes de “y”. (o bien de “x”)

Para ello debo multiplicar ambos miembros de cada ecuación por un coeficiente que haga que al sumar o restar se anule la incógnita. En nuestro caso multiplicaremos ambos miembros de la primera ecuación por “3”. (A la segunda ecuación no es necesario operarla, aunque en otros casos si lo sea.)

$$\begin{cases} (3x + y) \cdot 3 = 5 \cdot 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 15 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

2) Ahora que tenemos ambas ecuaciones con el mismo coeficiente de “y”, procedemos a restarlas, de modo de anular esa incógnita.

$$\begin{array}{r} 9x + 3y = 15 \\ - \\ 2x + 3y = 5 \\ \hline 7x + 0 = 10 \end{array}$$

3) Ahora que la ecuación es de solo una incógnita, por lo que procedemos a despejarla:

$$7x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{7}$$

4) Con ese valor obtenido para “x”, reemplazamos en cualquiera de las dos ecuaciones que teníamos como dato:

$$2 \cdot \frac{10}{7} + 3y = 5 \Rightarrow \frac{20}{7} + 3y = 5$$

Y procedemos a despejar el valor de “y”:

$$3y = 5 - \frac{20}{7} \rightarrow 3y = \frac{15}{7} \rightarrow y = \frac{15}{7 \times 3} \rightarrow y = \frac{5}{7}$$

## RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE DETERMINANTES

Utilizando el mismo ejemplo anterior:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Vemos que los coeficientes de “x” y de “y” son:

$$\begin{cases} 3x + 1y = 5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

El paso que sigue es crear dos matrices utilizando esos coeficientes. Se procede primero con la incógnita “x” y luego con la incógnita “y”.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} - \frac{5 \times 3 - 5 \times 1}{3 \times 3 - 2 \times 1} = \frac{15 - 5}{9 - 2} = \frac{10}{7}$$

Como vemos, para despejar la incógnita “x” formamos una matriz en el numerador, en la que la primera columna está constituida por los términos independientes de cada ecuación; la segunda columna está formada por los coeficientes de “y” de cada ecuación.

En el denominador creamos una segunda matriz, en la que la primera columna van los coeficientes de “x” y la segunda columna van los coeficientes de “y”.

Cada una de esas matrices se denominan “determinantes”. La forma de calcularlos es multiplicar sus extremos y restarlos.

Para el cálculo de la incógnita “y” se procede en forma similar, solo que en el numerador, la matriz está formada por una primera columna donde van los coeficientes de “x” de cada ecuación y una segunda columna donde van los términos independientes de cada ecuación..

El denominador es igual que el del caso anterior, es decir, formado por los coeficientes de “x” y de “y”.

La forma de calcular los determinantes es la misma explicada anteriormente.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} - \frac{3 \times 5 - 2 \times 5}{3 \times 3 - 2 \times 1} = \frac{15 - 10}{9 - 2} = \frac{5}{7}$$