

# DEFORMADAS A NUDOS INDESPLAZABLES

## 2013

---

Ing. E.D.U. Alberto ELICABE  
Ing. Alicia ADLER  
Ing. Julio CAPDEVILA  
Ing. Horacio ALTAMIRANO  
Ing. Gabriela TORRISI  
Ing. Dolores ARAMBURU  
Arq. Gabriela ASIS FERRI  
Arq. Laura Carolina BELLMANN  
Arq. Nahuel GHEZAN



# INDICE

|                                               |    |                                           |    |
|-----------------------------------------------|----|-------------------------------------------|----|
| Introducción.....                             | 03 | Barras sin carga.....                     | 22 |
| Deformada.....                                | 04 | Con momento externo en un extremo         |    |
| Vigas simplemente apoyadas.....               | 05 | y el otro articulado.....                 | 23 |
| Variación de la carga distribuida.....        | 05 | y el otro empotrado perfectamente.....    | 24 |
| Variación de la luz.....                      | 05 | y el otro con empotramiento elástico..... | 25 |
| Variación del momento de inercia.....         | 06 | Resumen comparativo.....                  | 26 |
| Variación del módulo de elasticidad.....      | 06 | Con momentos en los dos extremos          |    |
| Empotramiento perfecto.....                   | 07 | momentos de sentido contrario             |    |
| Empotramiento elástico.....                   | 08 | igual magnitud.....                       | 28 |
| Empotramiento mas que perfecto.....           | 10 | distinta magnitud.....                    | 28 |
| Viga con carga uniformemente distribuida      |    | momentos de igual sentido                 |    |
| Diagrama de momento flector (D.M.F.).....     | 11 | igual magnitud.....                       | 29 |
| Diagrama de esfuerzo de corte (D.E.C.).....   | 12 | distinta magnitud.....                    | 29 |
| Resumen comparativo.....                      | 14 |                                           |    |
| Viga con una carga puntual al medio de la luz |    |                                           |    |
| Diagrama de momento flector (D.M.F.).....     | 16 |                                           |    |
| Diagrama de esfuerzo de corte (D.E.C.).....   | 17 |                                           |    |
| Resumen comparativo.....                      | 18 |                                           |    |
| Viga con dos cargas puntuales iguales         |    |                                           |    |
| Ejercicio comparativo.....                    | 20 |                                           |    |



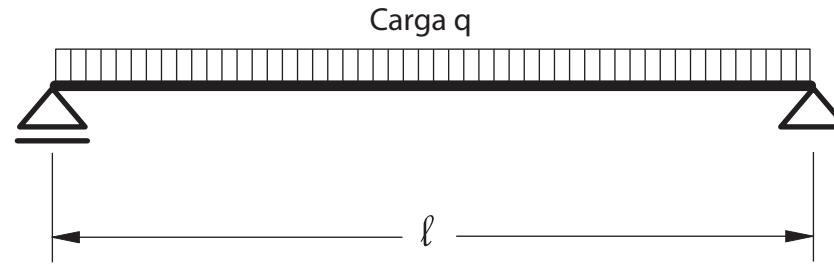
# Introducción

En este apunte estudiaremos cualitativamente el comportamiento de los elementos estructurales, con el fin último de adquirir los conocimientos necesarios para comprender su funcionamiento; prever resultados a la hora usar programas computacionales de calculo de estructuras; y tomar decisiones proyectuales y/o de diseño en su forma, verificación y construcción.

En el [Figura 1], se esta representando un esquema de cargas de una viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida. Este caso, bien podría ser el de una viga metálica de un entrepiso, o el de una viga de hormigón prefabricado apoyada sobre columnas. Nótese que no hemos dibujado la viga con su altura, ni su espesor, sino que hemos trazado una linea por su eje que representa ese elemento, y sobre ella la que representa a la carga distribuida.

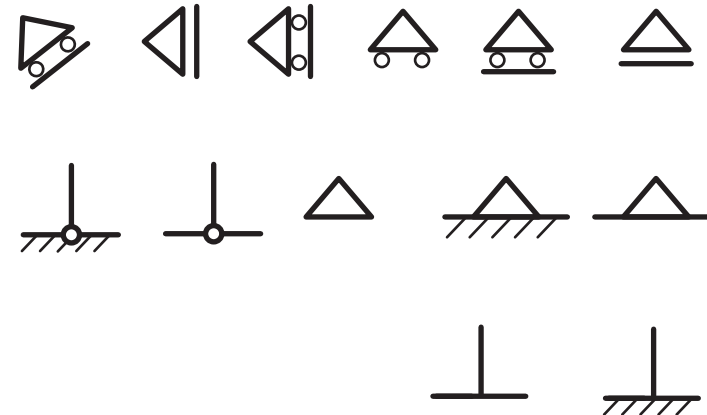
También están representados simbólicamente los apoyos, y aquí nos detenemos a estudiarlos. Existen tres tipos de apoyos: a) Articulación móvil o deslizante, b) articulación fija, y c) empotramiento; en la [Figura 2] se puede ver distintas formas de representarlos; también hay un cuarto tipo de vinculo llamado empotramiento elástico, pero el mismo lo veremos detalladamente mas adelante en este apunte.

Cada uno de estos apoyos restringe los movimientos de diferentes formas [Figura 3]: la articulación móvil solo restringe el desplazamiento en la dirección perpendicular a su plano de apoyo, por lo tanto las reacciones serán con esa dirección; la articulación fija, restringe el desplazamiento en todas las direcciones, pero no restringe el giro; el empotramiento impide el movimiento en todas las direcciones y también el giro, por lo que tendrá reacciones horizontales, verticales y momento reactivo.



[Figura 1]

Esquema de cargas

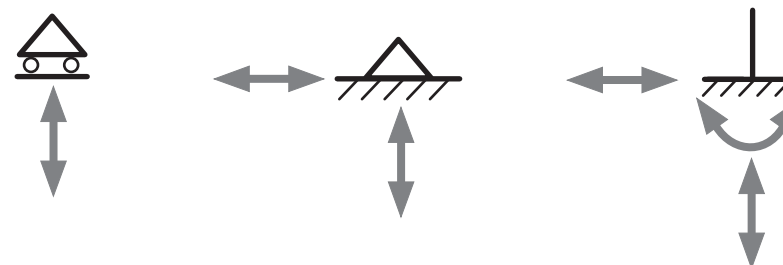


[Figura 2]

Articulaciones móviles

Articulaciones fijas

Empotramiento perfecto

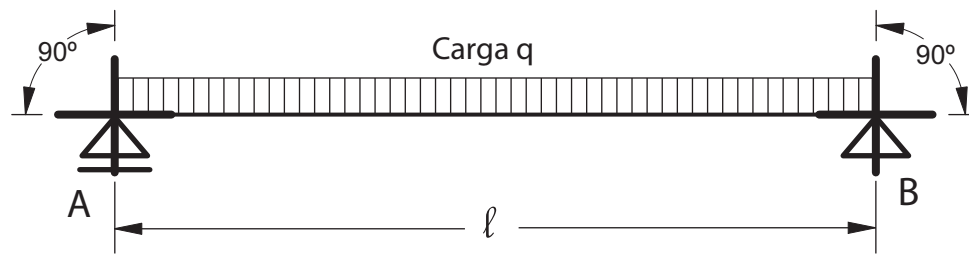


[Figura 3]

Restricciones

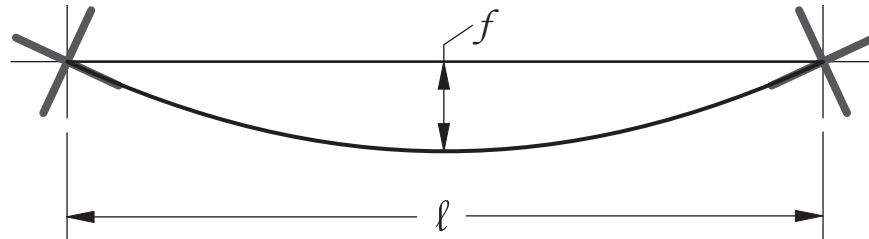
[Figura 4]

Esquema de Cargas de viga simplemente apoyada con carga distribuida



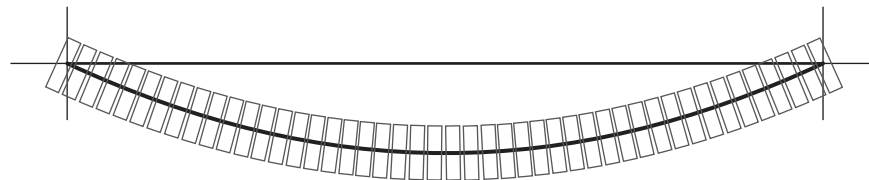
[Figura 5]

Flecha Deformada



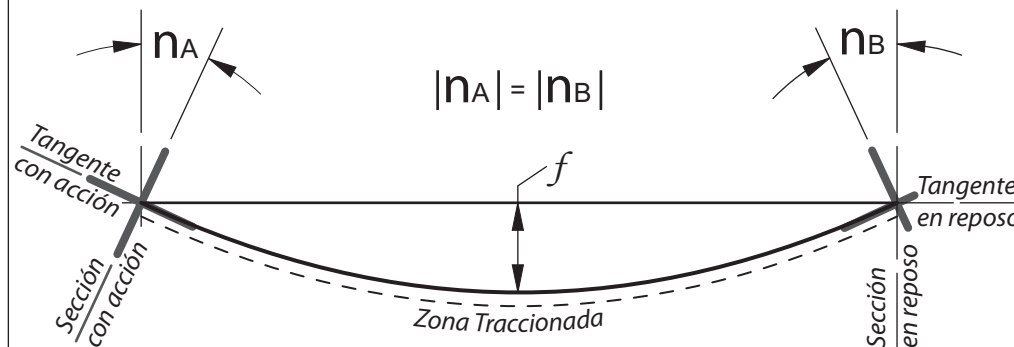
[Figura 6]

Eje de la viga



[Figura 7]

Giros Tangentes Tracciones



## Deformada

Las vigas se deforman bajo la acción de las cargas que reciben. En el caso de la viga simplemente apoyada con carga distribuida [Figura 4], se produce un descenso máximo en el centro, al que le llamaremos flecha =  $f$  [Figura 5]. Estos desplazamientos, afectarán la funcionalidad de las construcciones. Crean sensación de inseguridad en los usuarios, pueden producir grietas en la mampostería que soportan, acumulación de agua de lluvia o funcionamiento incorrecto de instalaciones. Por estas razones es conveniente limitar las flechas a una fracción de la longitud o luz de la viga:

$$f = \left( \frac{l}{\text{factor}} \right)$$

siendo  $f$  la flecha,  $l$  la luz de la viga y el factor un valor límite fijado por los reglamentos según diversas consideraciones.

Tengamos en cuenta que la línea que dibujamos como viga representa el eje de la misma: según Navier "Las secciones planas y perpendiculares al eje de la viga antes de la deformación, siguen siendo planas y perpendiculares al eje de la viga después de la deformación" [Figura 6].

Por otro lado, al estar simplemente apoyada, la viga gira libremente en sus extremos, en ángulos iguales y de sentido contrario. Observemos que los ángulos se miden (cualitativamente) comparando la viga en reposo y después de la aplicarle la carga y se representan con una cruz [Figura 7] compuesta por la **tangente** de la línea que simboliza la deformada y su perpendicular que representa la **sección**.

Por último, observemos que por debajo de la deformada se marca con línea de trazo, la zona traccionada.

# Giros en vigas simplemente apoyadas

Las magnitudes de los giros dependen de las cargas, la luz entre apoyos, el momento de inercia, el material y además, del tipo de apoyo (por ahora nos centraremos en si el apoyo es articulado o empotrado, y mas adelante veremos otros tipos de apoyos)

## Variación de la carga distribuida

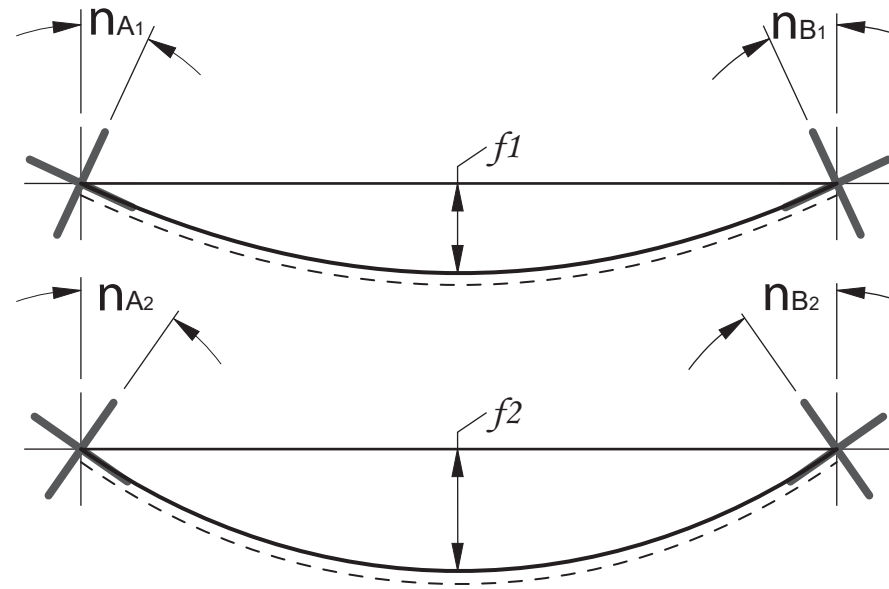
Ahora comparemos dos vigas a las que se le aplicamos **cargas uniformemente distribuidas** de distinta magnitud y mantenemos constante la luz, el momento de inercia (es decir mismas secciones), igual apoyos y material. Veremos que los giros son mayores cuando mayor es la carga que se le aplica a la viga [Figura 8].

Consecuentemente, como los giros son mayores cuando mayor es la carga, también será mayor la flecha y mayor la deformación.

## Variación de la luz

De la misma manera podemos intuir que si variamos la **luz** entre apoyos y mantenemos todas las demás variables constantes, también van a cambiar las magnitudes de los giros, siendo estos menores cuando menor es la luz a salvar [Figura 9].

También, la flecha será menor. Esto, si bien es cuantificable mediante fórmulas o programas computacionales, buscamos que se comprenda de manera intuitiva. Haga el siguiente experimento: tome una hoja, apóyela horizontalmente en los dedos índices de cada mano, varíe la distancia entre ellos y verá como la hoja se deforma más o menos en función de la separación entre los dedos.



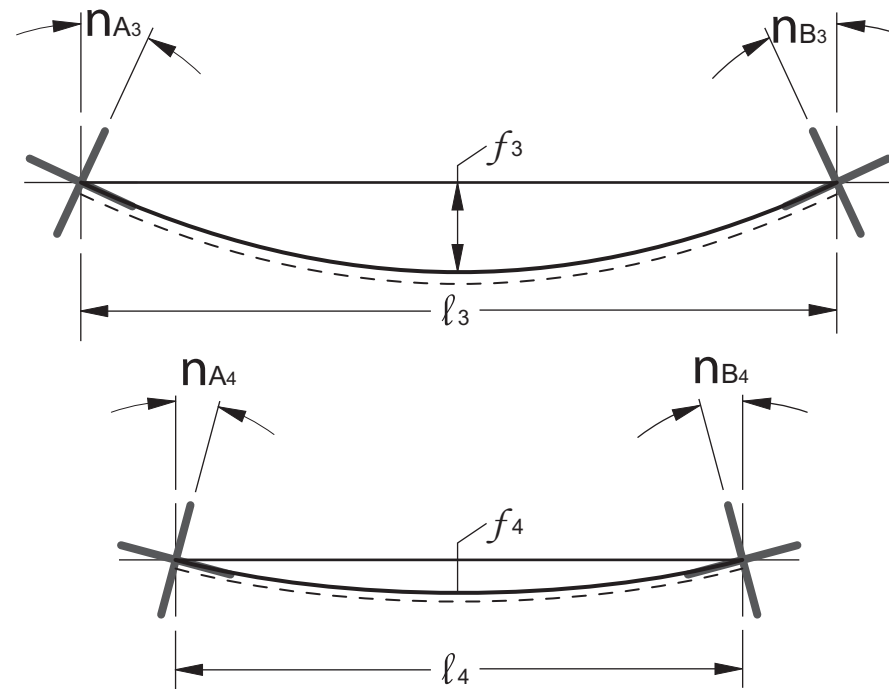
[Figura 8]  
Deformada comparativa con diferentes magnitudes de **cargas uniformemente distribuidas**

$$q_1 < q_2$$

$$|n_{A1}| < |n_{A2}|$$

$$|n_{B1}| < |n_{B2}|$$

$$f_1 < f_2$$



[Figura 9]  
Deformada comparativa con diferentes **luzes**

$$l_3 > l_4$$

$$|n_{A3}| > |n_{A4}|$$

$$|n_{B3}| > |n_{B4}|$$

$$f_3 > f_4$$

[Figura 10]

Momento de Inercia

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

[Figura 11]

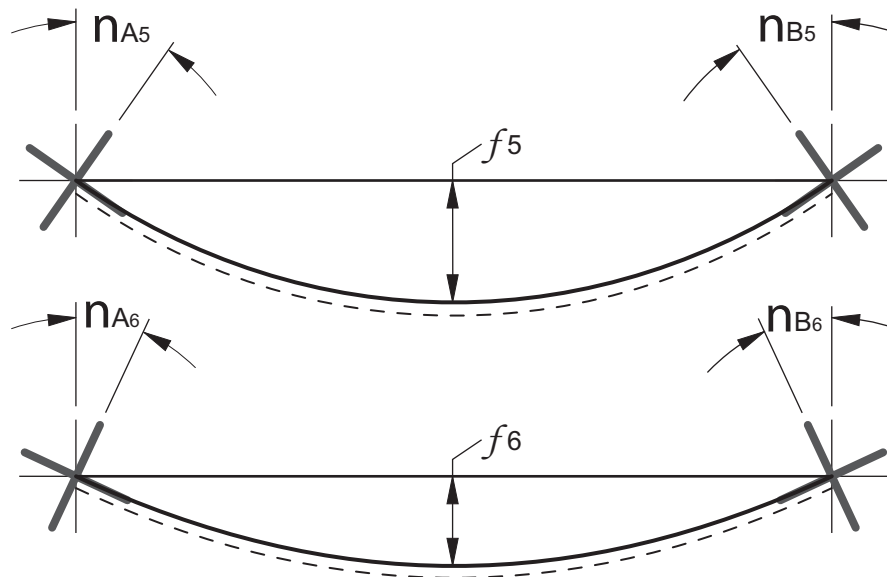
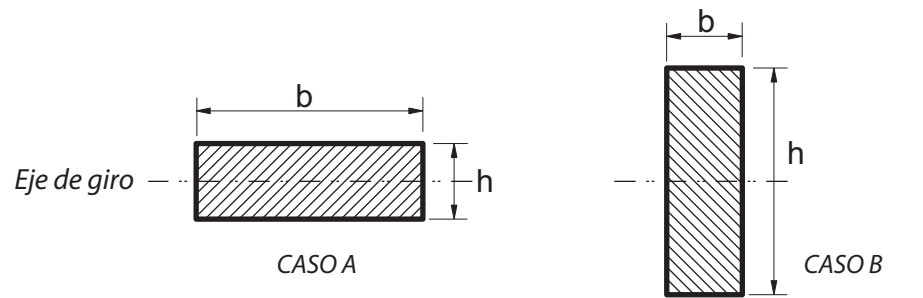
Deformada comparativa diferente momento de inercia

$$I_5 < I_6$$

$$|n_{A5}| > |n_{A6}|$$

$$|n_{B5}| > |n_{B6}|$$

$$f_5 > f_6$$



Flecha de una viga simplemente apoyada con carga distribuida q.

$$f = \frac{5}{384} \frac{q \cdot \ell^4}{E \cdot I}$$

Flecha de una viga simplemente apoyada con carga puntual P.

$$f = \frac{1}{48} \frac{P \cdot \ell^3}{E \cdot I}$$

Hasta aquí, hemos analizado 4 variables, y su relación con la deformada. Esta relaciones las podríamos cuantificar mediante las fórmulas que se muestran aquí arriba.

## Variación del momento de inercia ( I )

El momento de inercia es la medida de la inercia rotacional de un cuerpo. En el caso de una viga, dependerá de la forma, dimensión y posición de la sección transversal de la misma.

Así, las secciones pueden ser rectangulares, cuadradas, circulares, ovales, elípticas, etc, llenas o huecas. Si tratamos con vigas de hormigón armado, mayoritariamente usaremos secciones cuadradas o rectangulares, en cuyo caso el momento de inercia se calcula como se ve en la [Figura 10].

Ahora, analicemos como influye eso en la deformada y en los giros: pensemos en las dos secciones que están dibujadas en la [Figura 10] ¿Cuál cree que tiene mayor momento de inercia?. Si dijo el caso b, esta en lo correcto, y eso es debido a que h está elevado al cubo mientras que b no. Suponiendo que cada sección corresponde a vigas distintas. ¿Cuál piensa que se deformará menos?... Miremos la [figura 11], allí notaremos que cuando menor es el momento de inercia, mayor es la deformada. Entonces podríamos decir que el caso A corresponde a la deformada cuya flecha es f5 y el caso B a la deformada cuya flecha es f6.

## Variación del módulo de elasticidad ( E )

En este apunte, no explicaremos como se obtiene el módulo de elasticidad longitudinal (también conocido como módulo de Young), pero pretendemos que se entienda es un parámetro que **caracteriza la rigidez de un material** elástico.

Básicamente podemos decir que cuando mayor es este parámetro, menor será su deformación, por lo tanto el giro será menor. Habitualmente en las obras de arquitectura, el material es uno solo, por lo que no necesitaríamos compararlo.



# Empotramiento perfecto

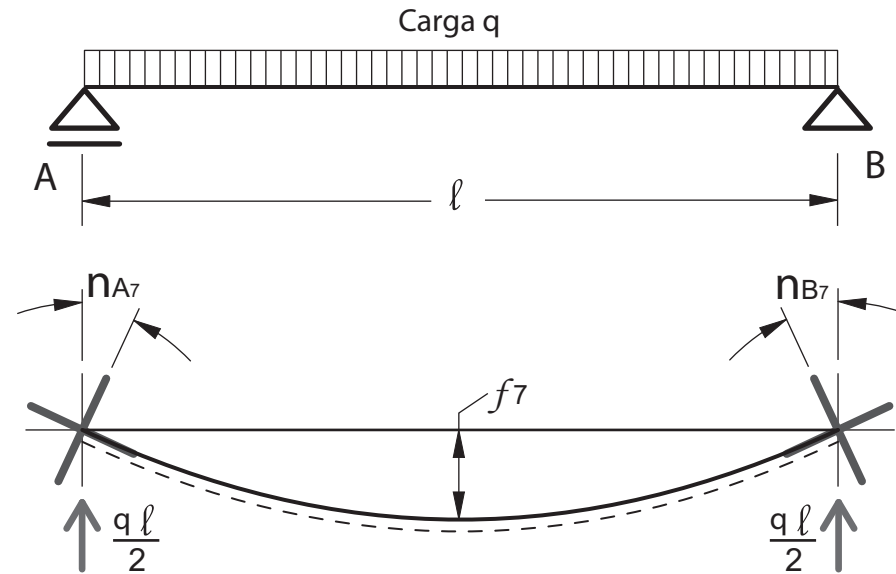
Ya hemos visto como influyen la carga, la luz, la sección y el material sobre la deformada, ahora veremos como intervienen los apoyos. Hemos analizado las distintas variables con articulaciones en los dos apoyos; ahora veremos como es la deformada con empotramientos perfectos. ¿Qué es un empotramiento perfecto en la práctica? Bien podría ser el caso de una viga unida monolíticamente a un tabique de hormigón, en cuyo caso la viga tiene mucho menor momento de inercia o rigidez que el tabique.

Al estar los extremos empotrados, los apoyos no giran es decir que la tangente y la normal en reposo, es la misma que cuando se le aplica la carga. Esto genera un cambio en la curvatura de la deformada, creando un punto de inflexión (Pi) donde la deformada cambia de cóncavo hacia arriba a cóncavo hacia abajo. Este Pi estará al quinto de la luz en las vigas que reciben carga distribuida.

Observamos también, que cuando cambia la curvatura, las tracciones cambian, ya que éstas siempre estarán del lado convexo de la deformada.

Del mismo modo, esto influye en la flecha, observando un descenso mucho menor comparado con en el caso de la viga simplemente apoyada.

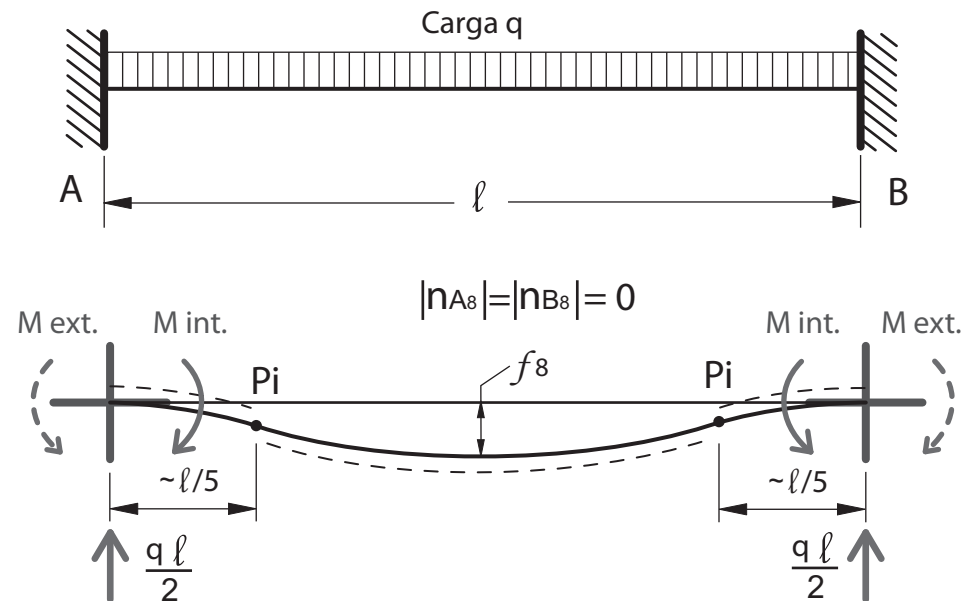
En la viga simplemente apoyada con carga distribuida, por nuestro conocimiento ya adquirido, sabemos que tiene reacciones verticales en los apoyos. En el empotramiento perfecto, estas reacciones son iguales, pero se le suman unas reacciones adicionales: las de momento, ya que el empotramiento restringe el giro. Aparecerán un momento reactivo externo a la viga y un momento interno, que serán de igual magnitud y sentido contrario para cumplir la ley de la estática en la que la sumatoria de momentos es igual a 0.



[Figura 12]

Esquema de cargas de viga simplemente apoyada con carga distribuida

Deformada de viga simplemente apoyada con carga distribuida

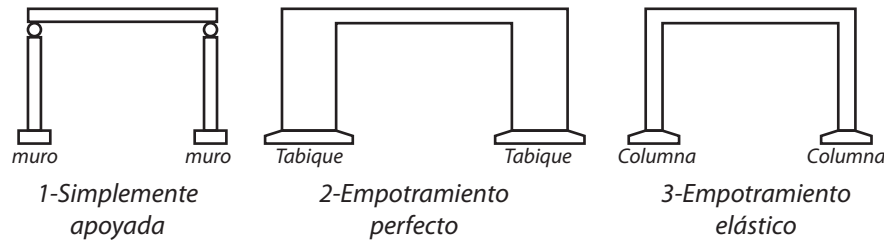


[Figura 13]

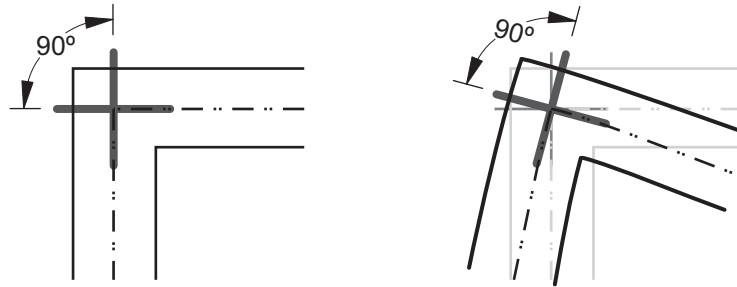
Esquema de cargas de viga con empotramientos perfectos

Deformada de viga con empotramientos perfectos y carga distribuida

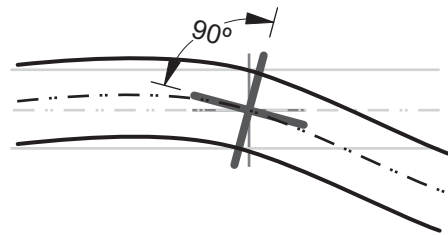
[Figura 14]  
Diferentes  
apoyos



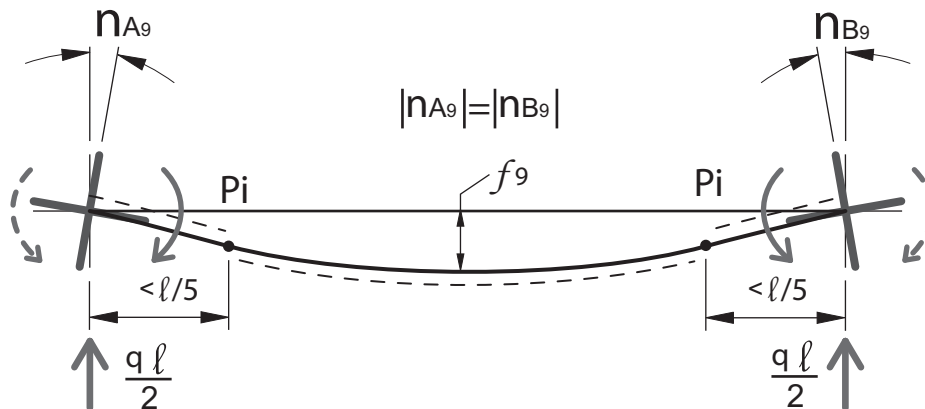
[Figura 15]  
Perpendicularidad en  
los nudos  
monolíticos



[Figura 16]  
Continuidad en vigas



[Figura 17]  
Deformada  
del pórtico 3  
de la figura 14



## Continuidad estructural Empotramiento elástico

Hasta el momento hemos analizado vigas aisladas, ya sea con apoyos articulados como empotrados. Ahora, analizaremos como influye la continuidad de las vigas.

En el empotramiento perfecto, la viga estaba monolíticamente unida a tabiques de hormigón, los cuales impedían el giro. Si a esos tabiques, les disminuimos las dimensiones [Figura 14.3] de forma tal que puedan deformarse, estaríamos permitiendo que el nudo gire, pero sin que llegue a ser una articulación. Dicho de otra manera, la viga con carga, haría girar a los nudos, pero las columnas impedirían ese giro, aunque no tanto como un tabique. A eso se le llama empotramiento elástico: algo intermedio entre el no giro del empotramiento perfecto y el libre giro de la articulación.

Antes de continuar desarrollando este tema, tengamos en cuenta que el nudo monolíticamente conformado, si gira, lo hace tanto la viga como la columna, y en la misma magnitud y sentido. Esto quiere decir que antes de aplicarle la carga como después, este nudo mantiene los 90° (o el ángulo que tuviera) [Figura 15]. En los casos de vigas continuas (como veremos en la página siguiente), el giro del nudo es uno solo, y afecta a la viga de la izquierda como la de la derecha [Figura 16].

Con respecto a la deformada, un empotramiento elástico se comporta de manera muy similar a un empotramiento perfecto, con las diferencias de que el giro deja de ser nulo (como dijimos mas arriba), y que los puntos de inflexión se acercan a los nudos o apoyos.

Si aislamos la viga del pórtico 3 en la figura 14, y le aplicamos una carga distribuida obtendremos una deformada como se muestra en la [Figura 17]. Siendo la flecha mayor que en el empotramiento perfecto, y menor que en la viga simplemente apoyada.

# Continuidad estructural

## Rigidez de los nudos

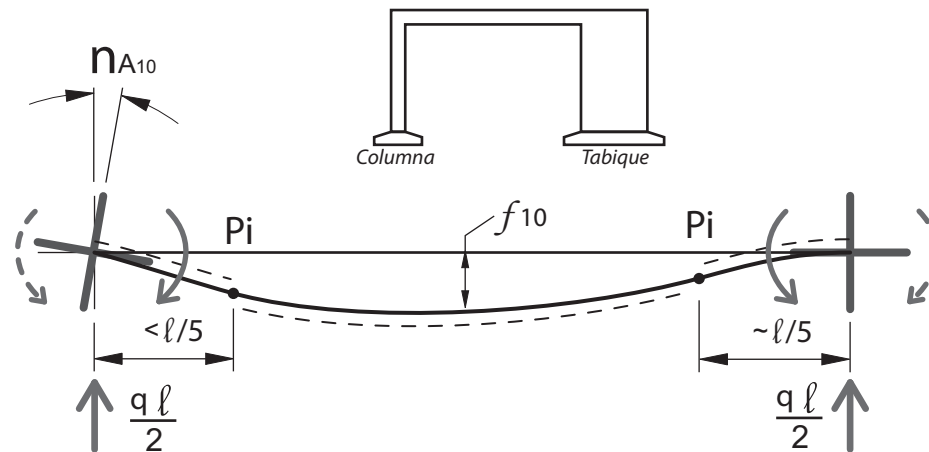
Nótese en la figura 17 de la página anterior que los giros son iguales, esto se debe a que el pórtico es simétrico y por lo tanto las rigideces en los nudos son iguales. Ahora, si no fuera simétrico, los nudos girarían en diferentes magnitudes. Por ejemplo, si ponemos a la izquierda una columna a la derecha un tabique, el de la izquierda sería un empotramiento elástico y el de la derecha uno perfecto [Figura 18], por lo tanto los giros serían distintos.

¿Y si los dos nudos fueran empotramientos elásticos?. En ese caso, habría que evaluar cual está mas impedido de girar. Dicho de otra manera, cual tiende mas a un empotramiento perfecto [Figura 19].

La idea de continuidad vale tanto para pórticos (donde viga y columna generan un nudo monolítico) como para vigas simplemente apoyada que continúan monolíticamente mas allá de su apoyo como el CASO 1 de la [Figura 20], donde el nudo B sería un empotramiento elástico mientras que los apoyos A y C son articulaciones.

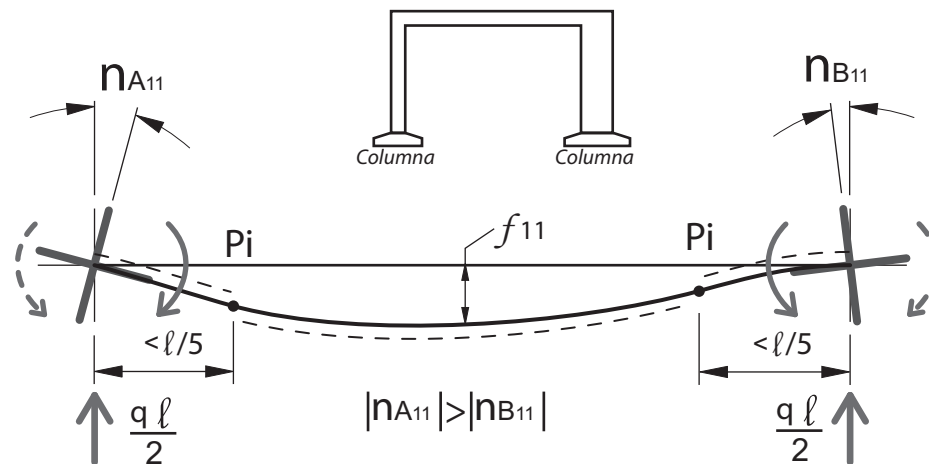
¿Cómo piensa que serían los apoyos D,E y F del caso 2? Volviendo al caso 1, si aislamos la viga A-B, tendríamos el caso de una articulación de un lado y un empotramiento elástico del otro, osea, que podrán imaginarse el resultado de la deformada combinando a la izquierda el comportamiento de una articulación con un empotramiento elástico a la derecha.

Pero ¿que pasaría en el caso 2 al aislar la viga E-F? Tendríamos empotramiento elástico a la izquierda y a la derecha, y sabemos que no son simétricos. En estos casos tendríamos que evaluar cual nudo está mas impedido de girar, teniendo en cuenta las cargas aplicadas, y todo aquello que hemos visto que hace girar mas o menos un nudo, como luces, las rigideces de los elementos vecinos, los apoyos, etc.



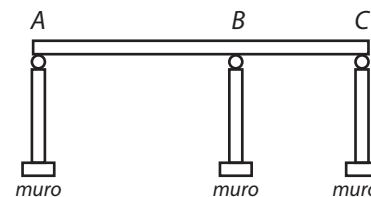
[Figura 18]

Viga con empotramiento elástico y empotramiento perfecto.

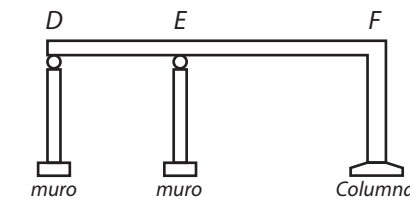


[Figura 19]

Viga con dos empotramientos elásticos distintos



CASO 1: Viga continua



CASO 2: Viga continua con columna

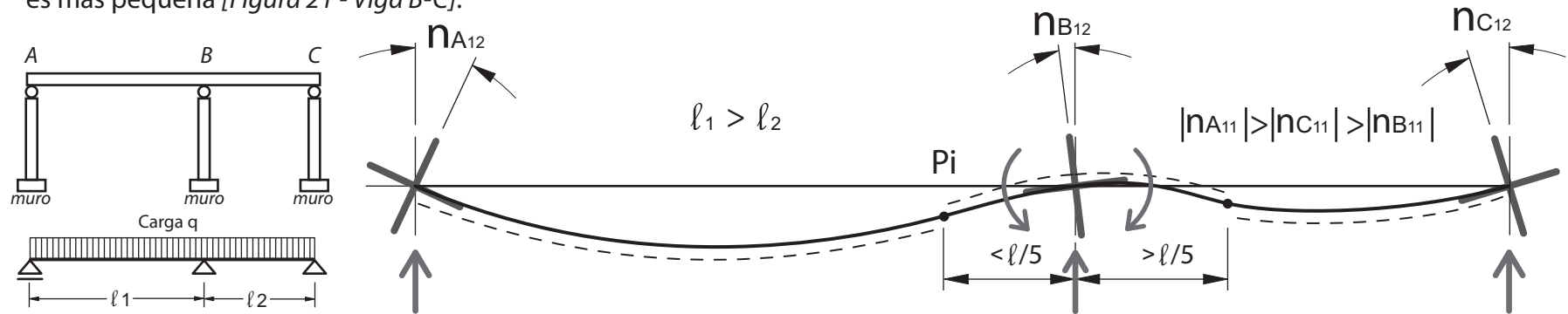
[Figura 20]

# Continuidad estructural

## Empotramiento más que perfecto

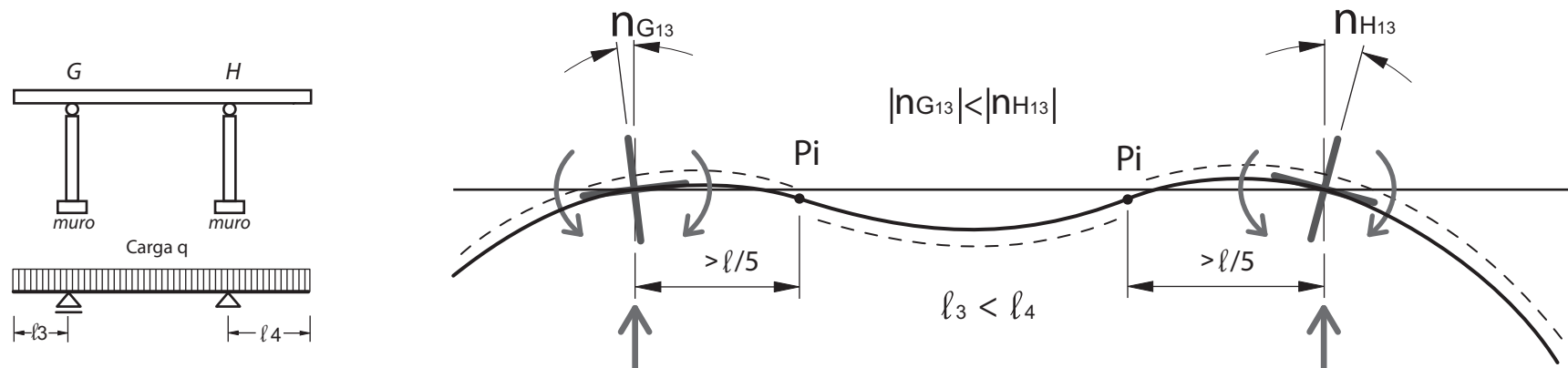
En el caso de la Figura 20 de la página anterior, si aisláramos la viga B-C obtendríamos lo que llamaremos empotramiento mas que perfecto, porque gira pero hacia el otro lado, es decir que gira para afuera. Si hiciéramos un orden donde establecemos cual apoyo gira más, empezáramos por la articulación, luego el empotramiento elástico, empotramiento perfecto, y empotramiento mas que perfecto. El comportamiento es muy similar al empotramiento perfecto, con la variación de que el punto de inflexión ahora esta a mas del quinto de la luz, el giro (como ya dijimos, es para el otro lado, arrastrado por la viga contigua) y consecuentemente, la flecha es más pequeña [Figura 21 - Viga B-C].

[Figura 21]  
Continuidad  
en vigas



En el ejemplo de la [Figura 22] , mostramos como seria el caso de una viga continua, con dos voladizos. Cabe la aclaración que cuando nos enfrentamos a un problema de estos, cuando se esta haciendo un análisis cualitativo, no se sabe para que lado van a ir los giros, ya que depende de la magnitud de las cargas, y de las luces, tanto de los voladizos, como del tramo. Suponiendo que los voladizos hacen girar los nudos para afuera, vemos que al ser mas grande un voladizo que el otro, también será mas grande su giro. En este caso, la viga G-H, esta experimentando un empotramiento mas que perfecto en cada uno de sus apoyos.

[Figura 22]  
Continuidad  
en vigas con  
voladizos



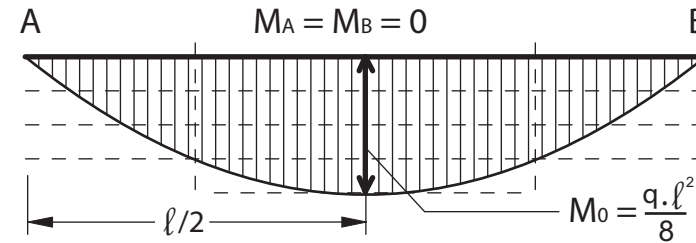
# Momento Flector

## Para carga distribuida

Nuestro conocimiento adquirido, nos permite saber como es el diagrama de momento flector de una viga simplemente apoyada con carga distribuida. También sabemos cual es el valor del el momento máximo ( $M_0$ ), y que se ubica al centro de la luz [Figura 23].

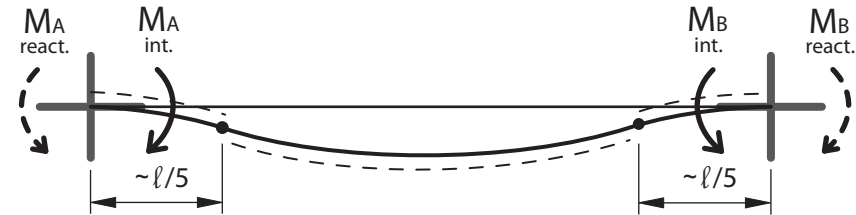
Cuando analizamos una viga con empotramientos perfectos, hemos visto que el apoyo restringe los giros con momentos reactivos, que llamaremos  $M_A$  y  $M_B$ , para que éste momento cumpla las condiciones de equilibrio, habrá un momento interno en dirección contraria y de la misma magnitud [Figura 24]. Esos momento internos son los valores  $M_A$  y  $M_B$  que graficaremos en el diagrama de momento flector (tengamos en cuenta que en la viga simplemente apoyada, el momento es nulo en los apoyos porque estos son articulaciones).  $M_A$  y  $M_B$  lo graficamos hacia arriba, porque de ese lado están las tracciones, así como graficamos el tramo hacia abajo [Figura 25]. Dicho esto, observemos que donde las tracciones pasan de estar arriba a estar abajo, es donde está el punto de inflexión en coincidencia donde el diagrama de momento flector pasa de arriba hacia abajo, por lo tanto donde hay un punto de inflexión el momento en ese punto es cero.

En los casos de empotramiento elástico, para graficar el diagrama de momento flector, primero tendremos que establecer cuales son los valores de  $M_C$  y  $M_D$ , luego "colgaremos" desde esos momento el diagrama de momento flector de una viga simplemente apoyada siguiendo como guía la "línea de cierre" [Figura 26]. Observemos que  $M_C$  y  $M_D$  tienen magnitudes diferentes, lo que hace que la línea de cierre quede inclinada.



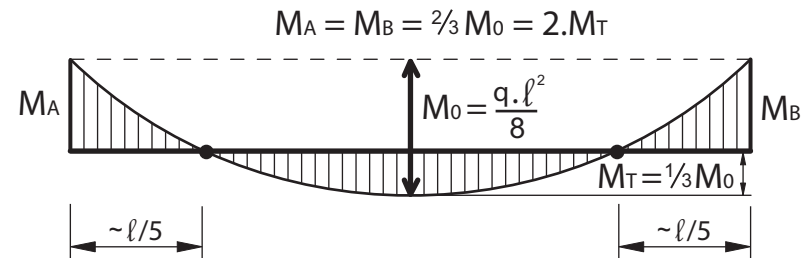
[Figura 23]

Diagrama de momento flector de una viga simplemente apoyada y con carga uniformemente distribuida.



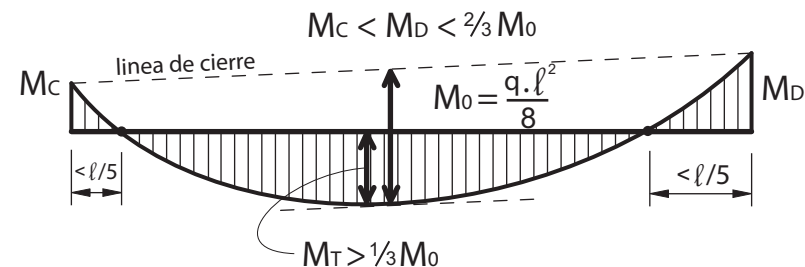
[Figura 24]

Deformada de viga con empotramiento perfecto y carga uniformemente distribuida



[Figura 25]

Diagrama de momento flector de una viga con dos empotramientos perfectos y con carga uniformemente distribuida.

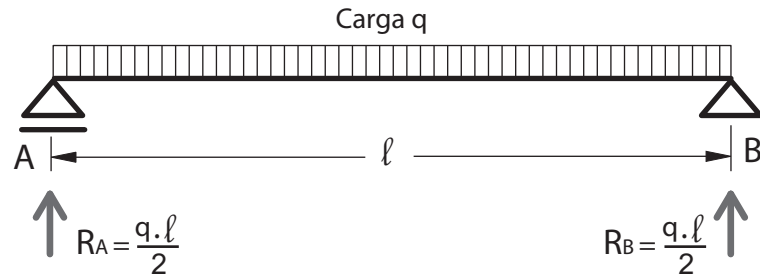


[Figura 26]

Diagrama de momento flector de una viga con empotramientos elásticos y con carga uniformemente distribuida.

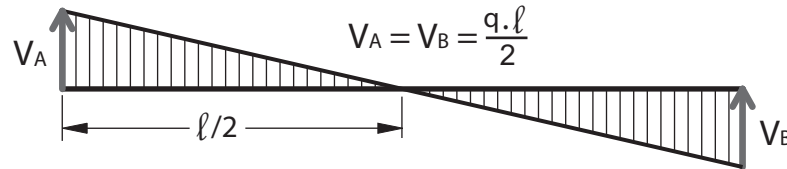
[Figura 27]

Reacciones de viga simplemente apoyada con carga distribuida



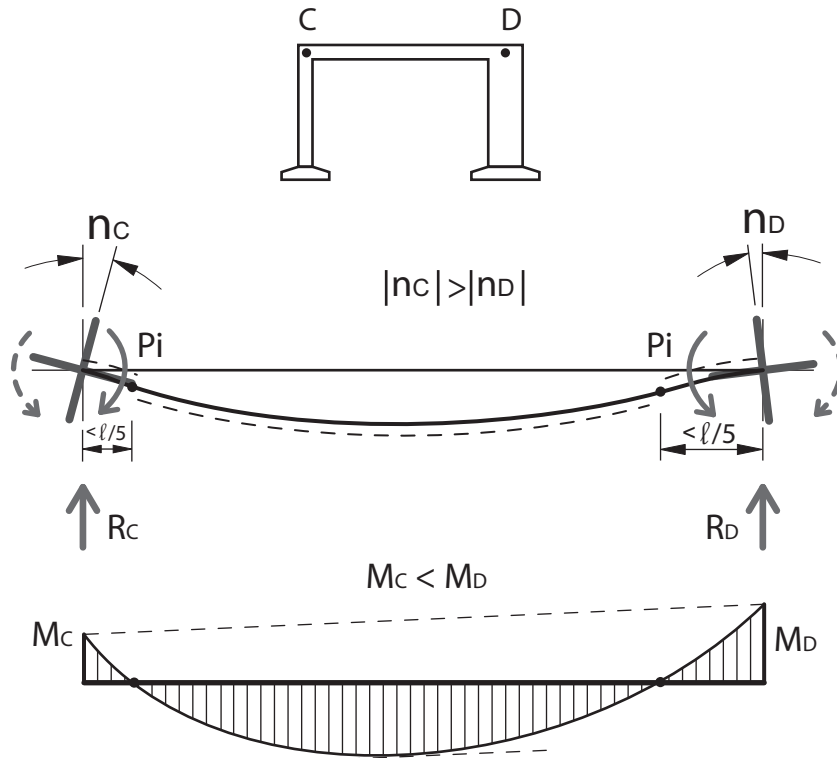
[Figura 28]

Diagrama de esfuerzo de corte en viga simplemente apoyada y carga distribuida



[Figura 29]

Viga con continuidad estructural asimétrica. Su esquema en vista, su deformada, y su diagrama de momento flector.



## Reacciones y Esfuerzo de corte Para carga distribuida

Para entrar en el estudio del diagrama de esfuerzo de corte, primero tendremos que analizar las magnitudes de las reacciones.

En una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida, sabemos por nuestro conocimiento que las reacciones son  $R_A$  y  $R_B = q \cdot l / 2$  [Figura 27].

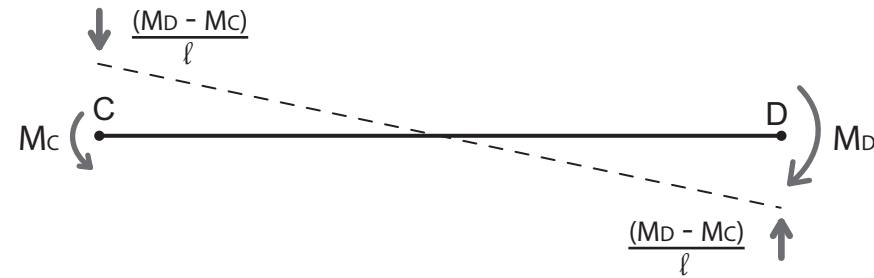
Con esas reacciones podemos empezar a trazar el diagrama de esfuerzo de corte. Comenzamos colocando la magnitud de  $R_A$  en el punto donde se produce esta reacción, en este caso el punto A, luego a medida que nos corremos hacia la derecha (del punto A al punto B) progresivamente vamos disminuyendo el corte  $q \cdot d$  siendo  $d$  la distancia que recorrimos. Cuando llegamos al punto B, subimos la magnitud  $R_B$ . [Figura 28].

En los casos de vigas con continuidad, si estas no son simétricas, las reacciones serán diferentes. Para analizarlas, tenemos que saber que en estos casos, los momentos en ambos nudos no son iguales [Figura 29], y por lo tanto uno será mayor que otro [Figura 29].

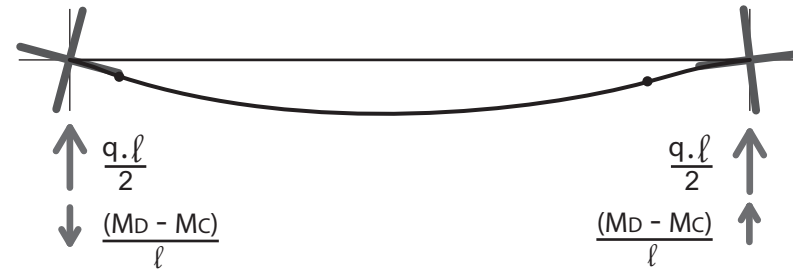
Esta diferencia entre los momentos hará que la viga tienda a girar en su totalidad [Figura 30]. Para saber hacia donde gira, tenemos que aislar la viga y colocar los momentos reactivos (ya sea de un empotramiento perfecto como de un empotramiento elástico), dándole mayor tamaño al de mayor magnitud, lo cual nos dará una idea para que lado girará la pieza. Para equilibrar ese giro tendrá existir una cupla equilibrante, cuya magnitud será la diferencia de momentos dividido el brazo de palanca ( $\ell$ ).

Cada una de las fuerzas de esta cupla reaccionara en un sentido distinto, por lo tanto una se sumara a la reacción debido a la carga  $q$  y la otra se restara [Figura 31], haciendo de esa manera que una de las reacciones sea mayor que la otra.

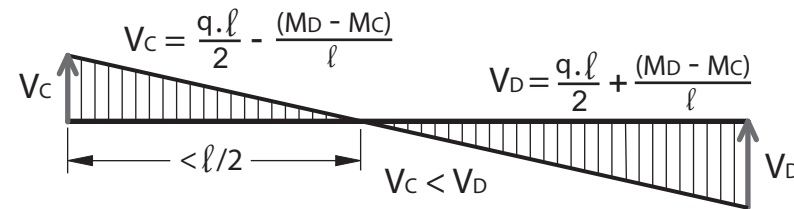
En la [Figura 32] vemos el diagrama de esfuerzo de corte que corresponde esta viga, donde podemos observar que la reacción C es menor que la reacción D. Esto hace que el diagrama ya no sea simétrico como en la viga simplemente apoyada, por lo tanto el valor cero de corte ya no se encuentra en el medio de la viga, si no que esta desplazado hacia la punta que toma menos corte. Recordemos que cuando el corte vale cero, el momento flector es máximo, por eso la importancia de saber donde se ubica este punto.



[Figura 30]  
Cupla reactiva ante una diferencia de momentos en los apoyos.



[Figura 31]  
Suma y resta de vectores que representan las reacciones.



[Figura 32]  
Diagrama de esfuerzo de corte de una viga con continuidad asimétrica y carga uniformemente distribuida.

# Resumen comparativo de vigas (aisladas de su contexto) con carga distribuida

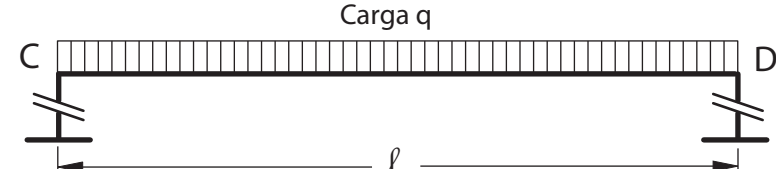
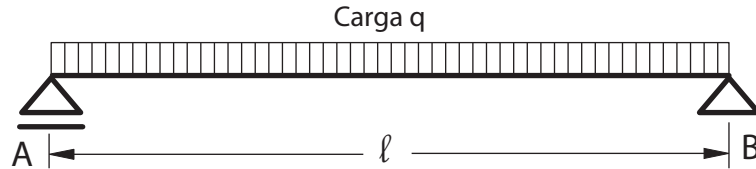


**VIGA SIMPLEMENTE APOYADA**  
Mayor magnitud de giro, mayor flecha, sin momento en los apoyos y la de mayor momento en el tramo ( $M_0$ ).

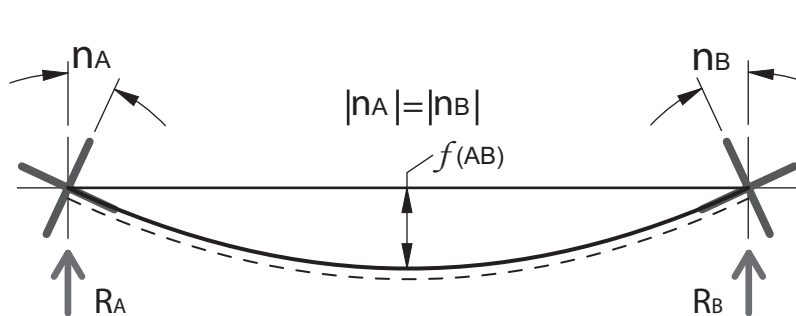


**EMPOTRAMIENTO ELÁSTICO**  
Comportamiento intermedio entre simplemente apoyada y empotramiento perfecto, tendiendo mas a uno u otro.

Esquemas de cargas



Deformada con sus reacciones



$$|n_B| > |n_C|$$

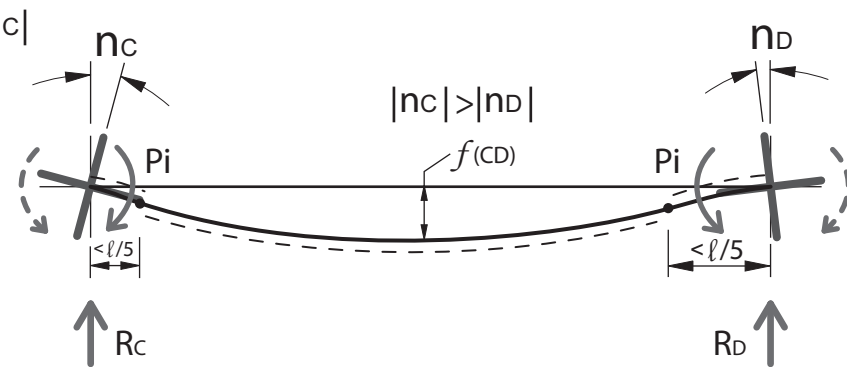


Diagrama de momento flector

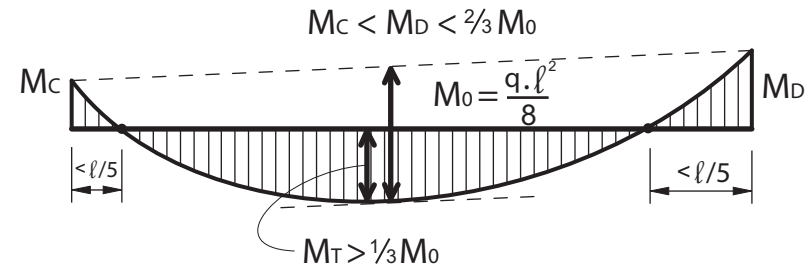
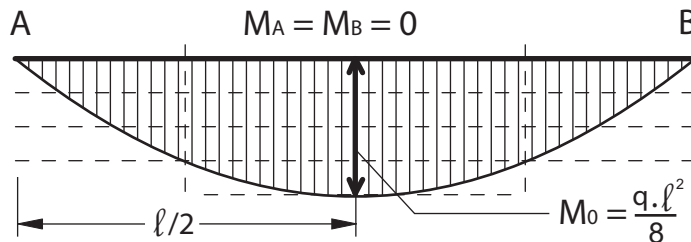
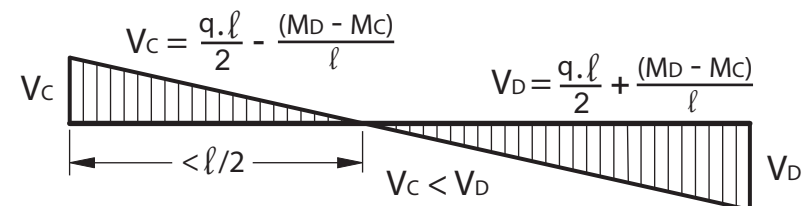
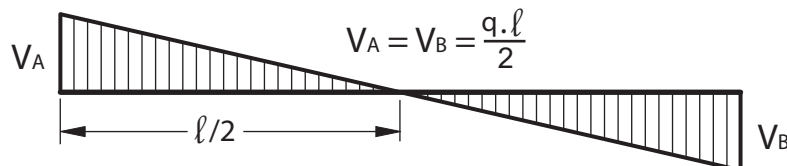


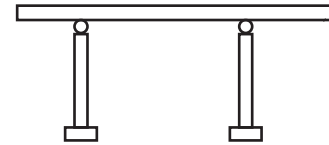
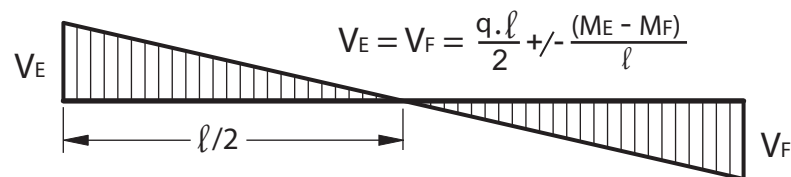
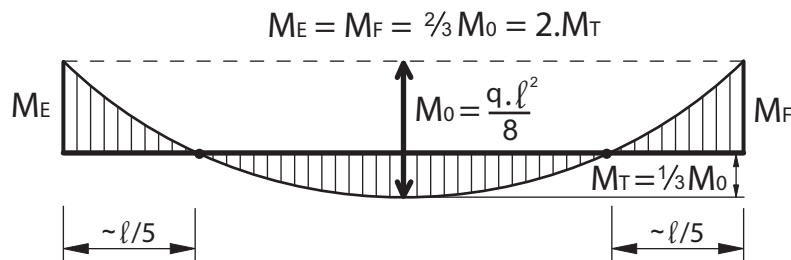
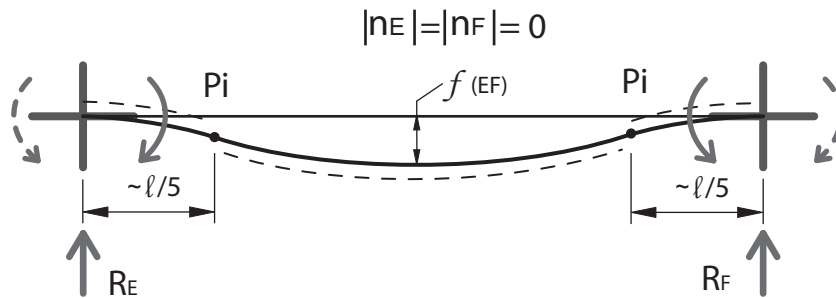
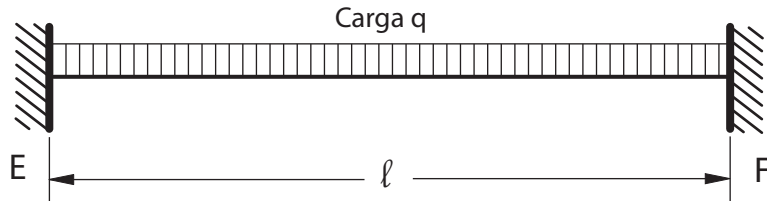
Diagrama de esfuerzo de corte



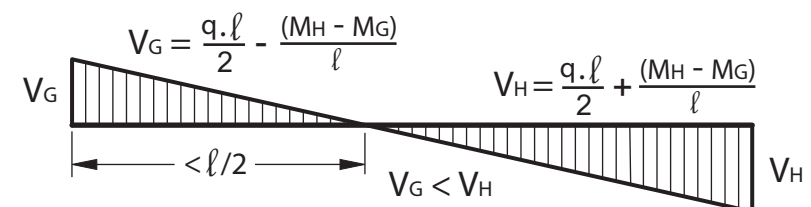
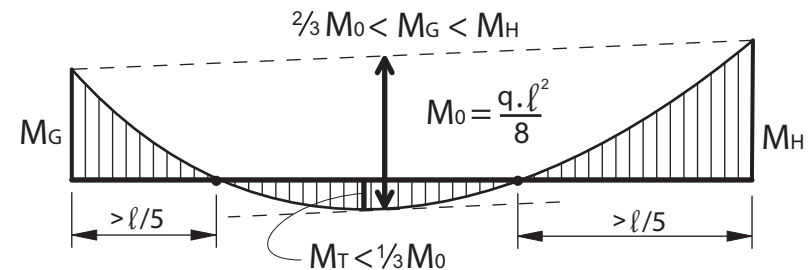
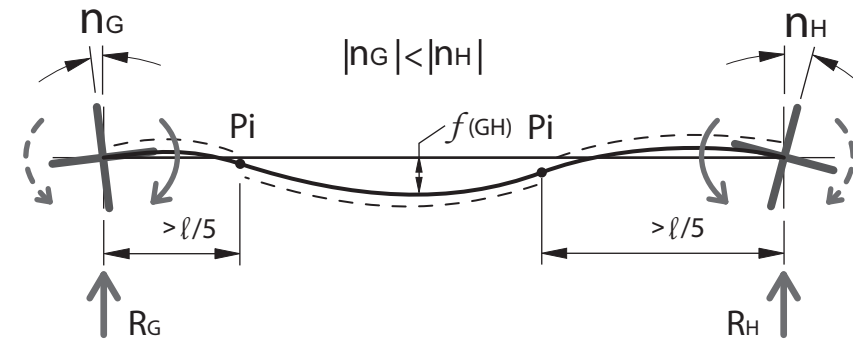
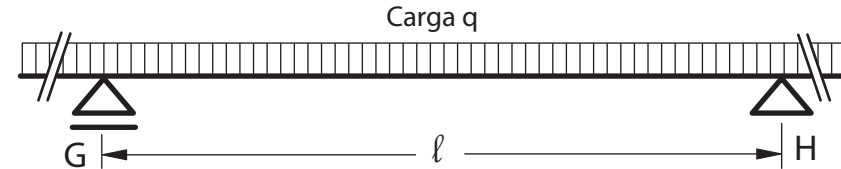
# Resumen comparativo de vigas (aisladas de su contexto) con carga distribuida



**EMPOTRAMIENTO PERFECTO**  
Los nudos no giran, disminución de la flecha, momento en los apoyos mayor que en el tramo.



**EMPOTRAMIENTO MAS QUE PERFECTO**  
Giro de los nudos hacia afuera, menor flecha, el de mayor momento en los apoyos y menor en el tramo.



Esquemas de cargas

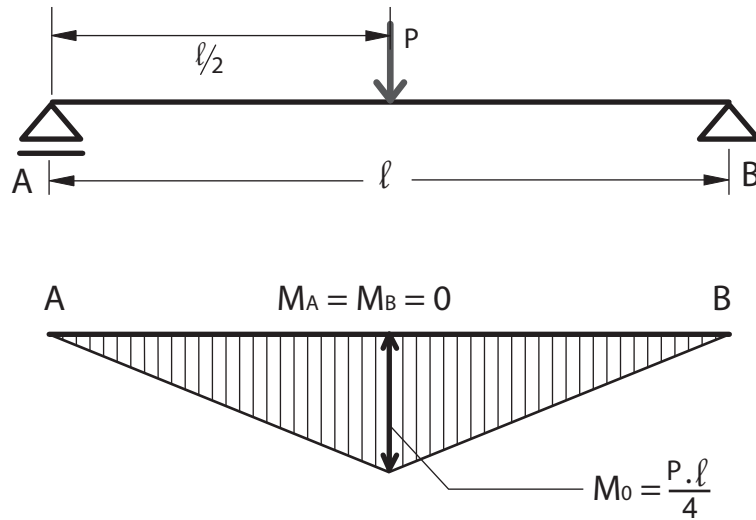
Deformada con sus reacciones

Diagrama de momento flector

Diagrama de esfuerzo de corte

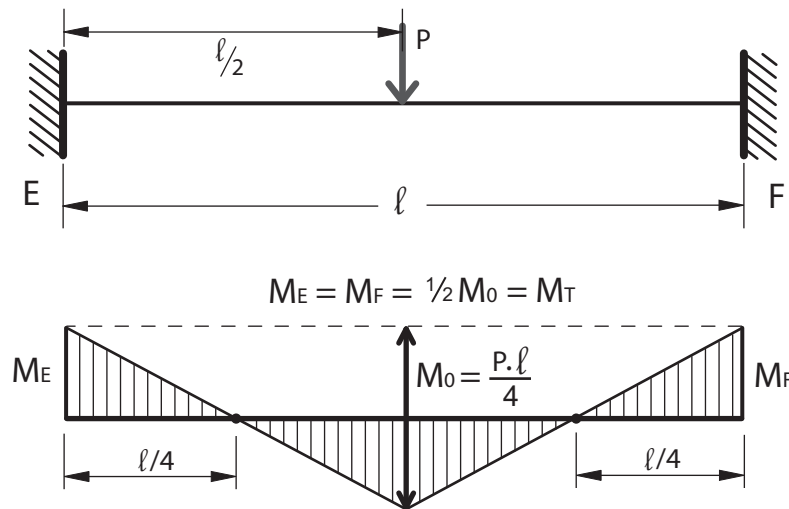
[Figura 33]

Esquema de cargas de una viga simplemente apoyada con una carga puntual  $P$  al medio de la luz, y su diagrama de momento flector característico.



[Figura 34]

Esquema de cargas de una viga con empotramientos perfectos y una carga puntual  $P$  al medio de la luz, y su diagrama de momento flector característico.



## Carga puntual al medio de la luz

### Diagrama de Momentos

Antes hemos analizado vigas con cargas uniformemente repartidas, ahora veremos un breve análisis de carga puntual.

En carga distribuida empezamos viendo como son los diagramas de momento en los casos en que la viga esta simplemente apoyada y cuando esta perfectamente empotrada. Esto es porque desde el análisis de estos casos extremos se desprenden los diagramas de vigas con empotramiento elástico y empotramiento mas que perfecto.

Ahora bien, por los conocimientos ya adquiridos, sabemos que el diagrama de momento flector de una viga simplemente apoyada con una carga puntual  $P$  al centro de la luz, nos daría un triángulo como se muestra en la [Figura 33].

Cuando empotrarnos los dos extremos de la viga, lo que sucede es que en ese diagrama la línea de cierre se levanta, uniendo ahora los momentos  $M_E$  y  $M_F$  de la [Figura 34], que este caso específico valen  $\frac{1}{8} \cdot P \cdot l$ .

Conociendo los estos dos casos extremos, podemos suponer como serían los empotramientos elásticos, pensándolos como situaciones intermedias entre empotramiento perfecto y articulación. Podemos decir que cuando el momento en el apoyo se acerca al valor del empotramiento perfecto, ese nudo tiende a ser un empotramiento perfecto, y cuando el momento disminuye, hasta llegar casi a cero, tiende a "ser articulado".

En el caso de empotramiento mas que perfecto, los momentos en los apoyos son mayores que el perfecto, y lo que tenemos que hacer, es "colgar" el diagrama de momento de  $M_0$  (momento isostático). Estos diagramas se pueden ver en el Resumen comparativo de la pág. 19.

# Carga puntual al medio de la luz

## Diagrama de Esfuerzos de Corte (D.E.C.)

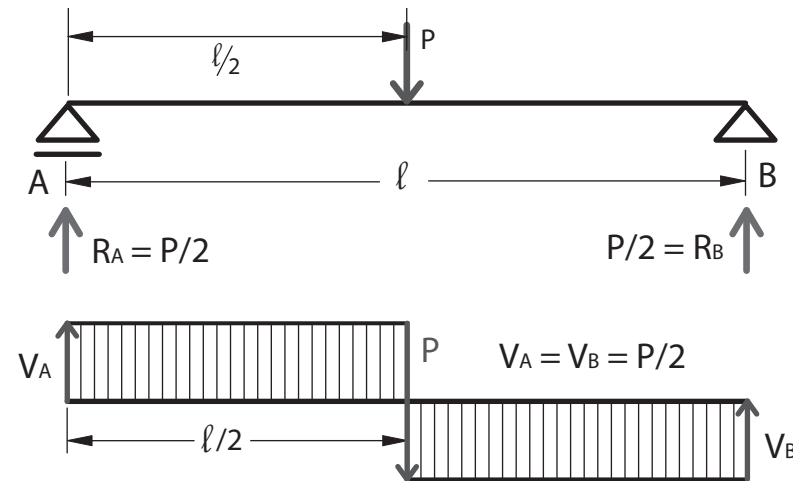
Como ya hemos visto, para analizar el corte, ya tenemos que haber resuelto el diagrama de momentos. Esto es porque según como sean los momentos en los apoyos van a ser las reacciones y en función de como sean las reacciones, será el diagrama de esfuerzo de corte.

Ahora, una viga simplemente apoyada con carga puntual al medio de la luz, tendrá momentos nulos en los apoyos (ya que al ser estos articulados, no toman momento), por lo tanto las reacciones serán  $P/2$ . Por lo tanto el D.E.C. es el que se muestra [Figura 35].

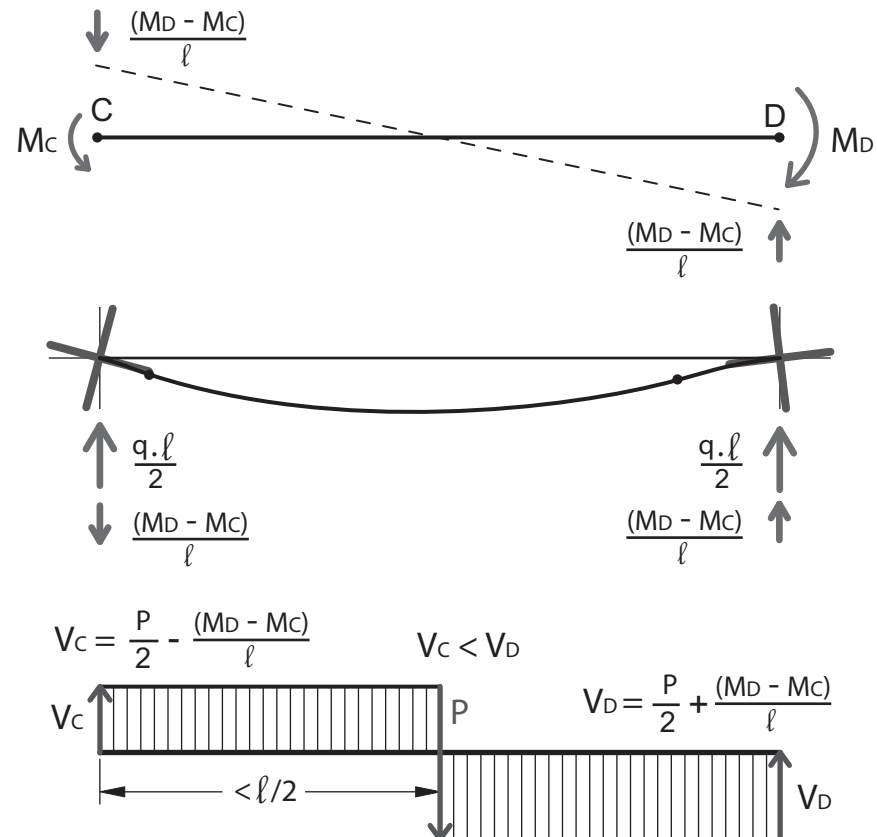
En el caso que tengamos una viga con empotramientos elásticos diferentes, debemos analizar cual de los momentos en los apoyos es mayor para saber hacia donde giraría la viga, y colocar una cupla reactiva equilibrante [Figura 36]. Esta cupla la sumamos y restamos a las reacciones isostáticas dependiendo del sentido.

Ahora que sabemos el valor de las reacciones, empezamos a confeccionar el D.E.C., teniendo en cuenta que éste representa todas las fuerzas que se encuentran a la izquierda de determinada sección. Cuando nos paramos justo al lado del apoyo, veremos que la única fuerza es la reacción  $R_c$ , si continuamos avanzando hacia la derecha, no aparece ninguna fuerza hasta que llegamos a  $P$ , por lo tanto, el corte es constante hasta  $P$ . Allí, justo después de pasar  $P$ , bajamos y continuamos constante hasta llegar a  $R_D$  y subimos cerrando el D.E.C.

Si miramos el resumen comparativo para cargas uniformemente distribuidas, veremos que las vigas simplemente apoyadas y las de empotramiento perfectos, tienen el mismo diagrama de esfuerzo de corte; esto es porque son simétricos sus momentos en los apoyos, por lo tanto no se genera un giro.



[Figura 35]  
Esquema de cargas de una viga simplemente apoyada y una carga puntual  $P$  al medio de la luz con las reacciones y el diagrama de esfuerzo de corte característico.



[Figura 36]  
Esquema del giro de la viga en función de la magnitud de los momentos en los apoyos y su cupla reactiva.

Reacciones

D.E.C. de una viga con carga puntual al medio de la luz, y momentos diferentes en los apoyos.

# Resumen comparativo de vigas (aisladas de su contexto) con carga puntual P

Esquemas de cargas

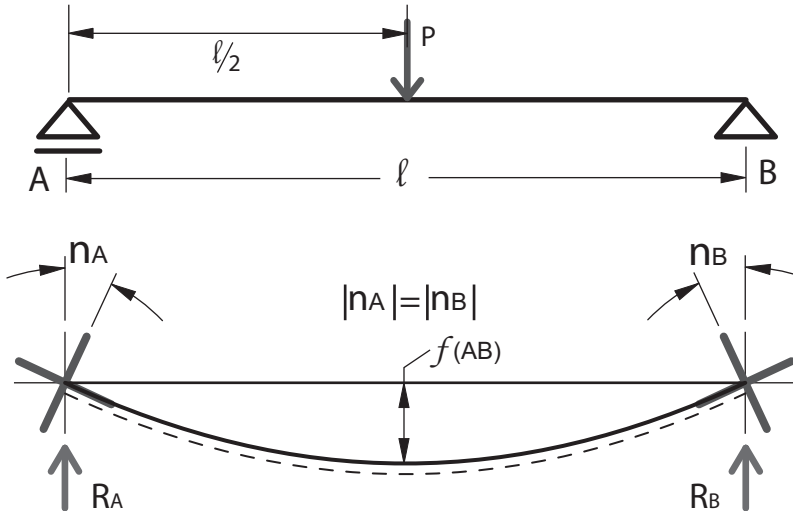


**VIGA SIMPLEMENTE APOYADA**  
Mayor magnitud de giro, mayor flecha, sin momento en los apoyos y la de mayor momento en el tramo ( $M_0$ ).



**EMPOTRAMIENTOS ELÁSTICOS**  
Comportamiento intermedio entre simplemente apoyada y empotramiento perfecto, tendiendo mas a uno u otro.

Deformada con sus reacciones



$$|n_B| > |n_C|$$

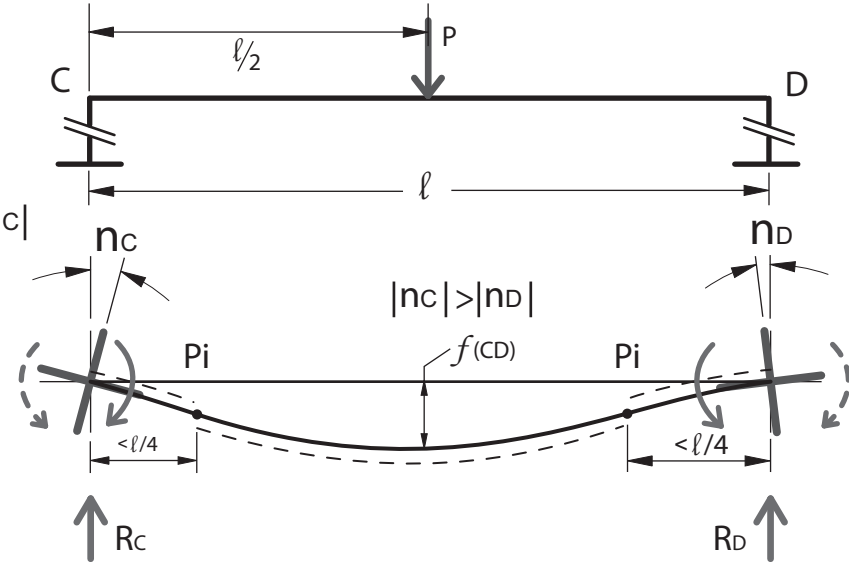


Diagrama de momento flector

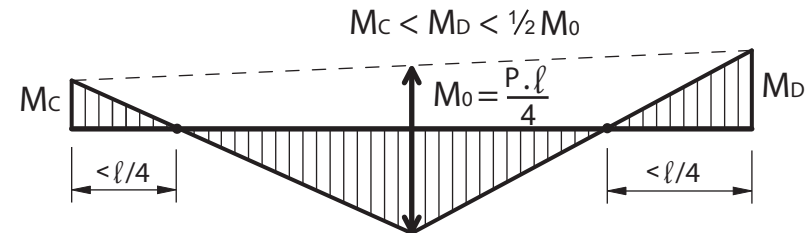
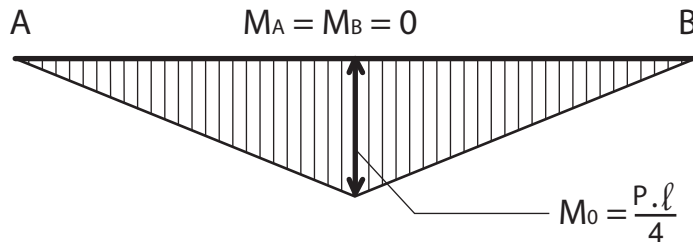
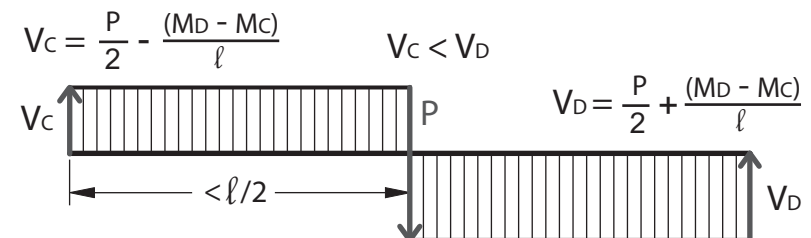
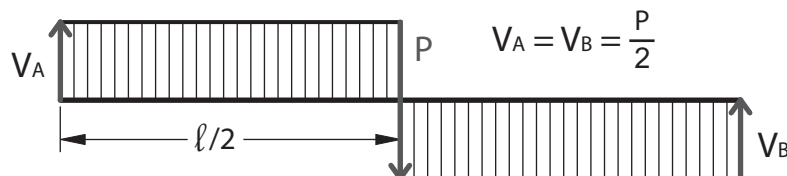


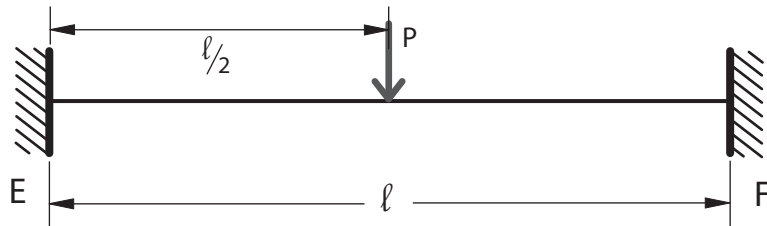
Diagrama de esfuerzo de corte



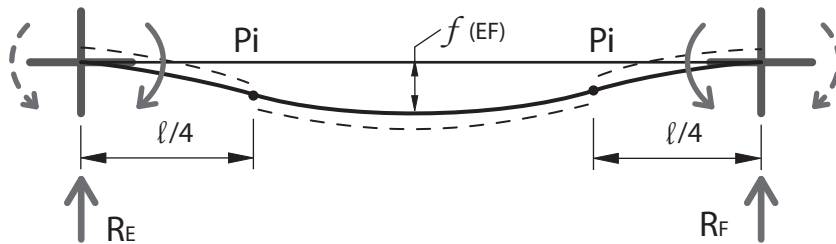
# Resumen comparativo de vigas (aisladas de su contexto) con carga puntual P



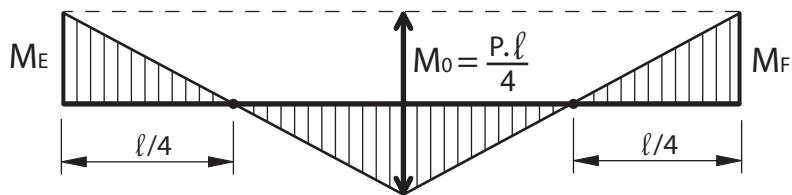
**EMPOTRAMIENTO PERFECTO**  
Los nudos no giran, disminución de la flecha, momento en los apoyos mayor que en el tramo.



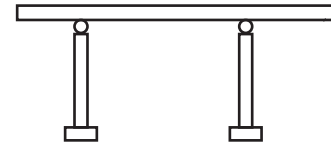
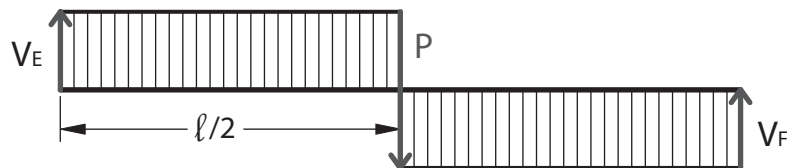
$$|n_E| = |n_F| = 0$$



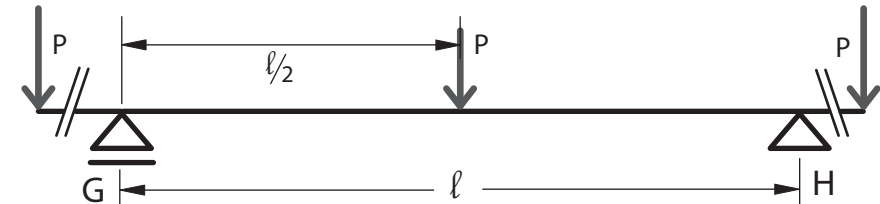
$$M_E = M_F = \frac{1}{2} M_0 = M_T$$



$$V_E = V_F = \frac{P}{2} \pm \frac{(M_E - M_F)}{l}$$



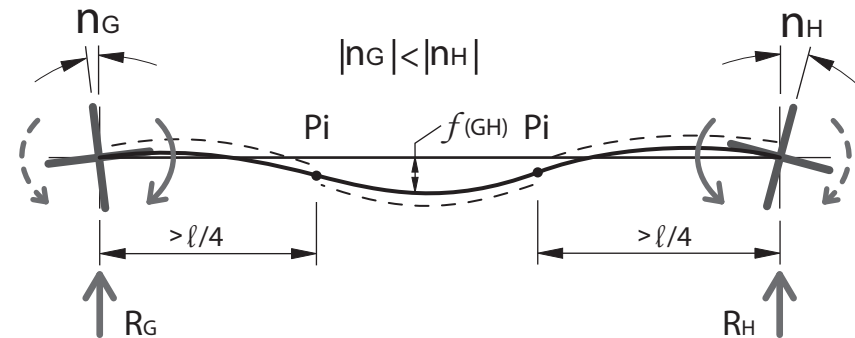
**EMPOTRAMIENTO MAS QUE PERFECTO**  
Giro de los nudos hacia afuera, menor flecha, el de mayor momento en los apoyos y menor en el tramo.



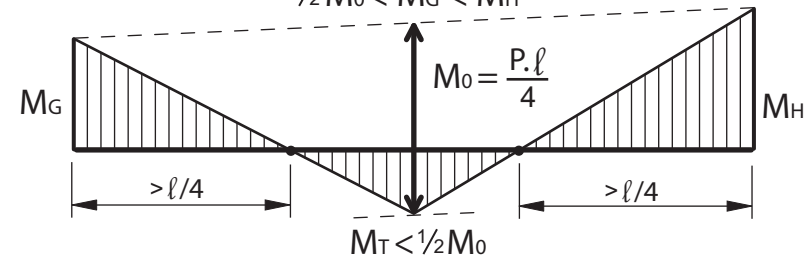
$$n_G$$

$$|n_G| < |n_H|$$

$$n_H$$



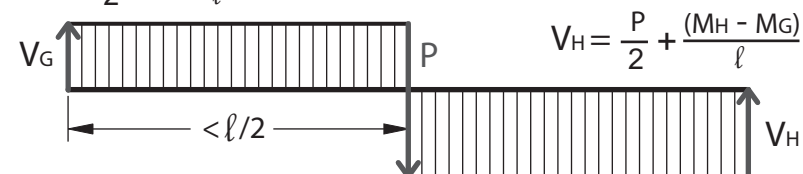
$$\frac{1}{2} M_0 < M_G < M_H$$



$$V_G = \frac{P}{2} - \frac{(M_H - M_G)}{l}$$

$$V_G < V_H$$

$$V_H = \frac{P}{2} + \frac{(M_H - M_G)}{l}$$



Esquemas de cargas

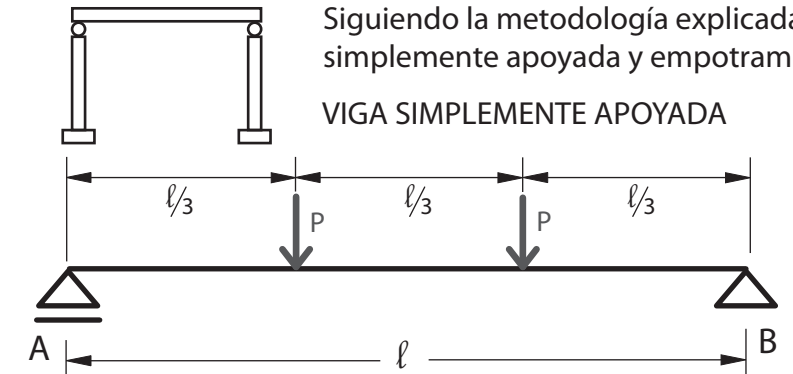
Deformada con sus reacciones

Diagrama de momento flector

Diagrama de esfuerzo de corte

# Ejercicio de vigas (aisladas de su contexto) con dos cargas puntuales P iguales

Esquemas de cargas



Deformada con sus reacciones

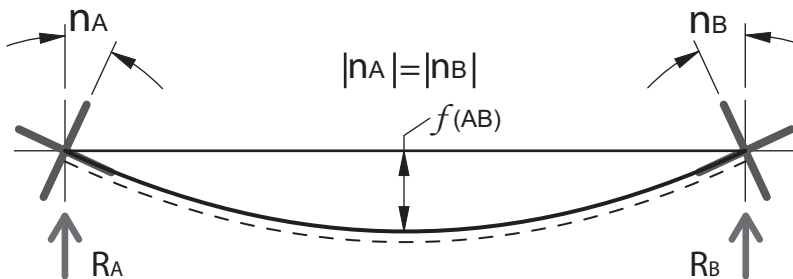


Diagrama de momento flector

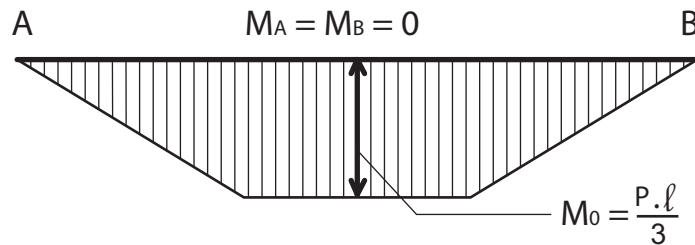
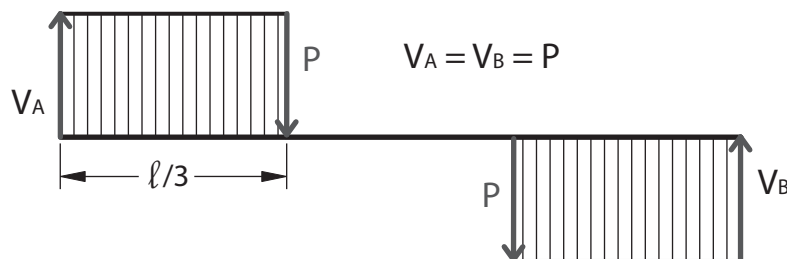
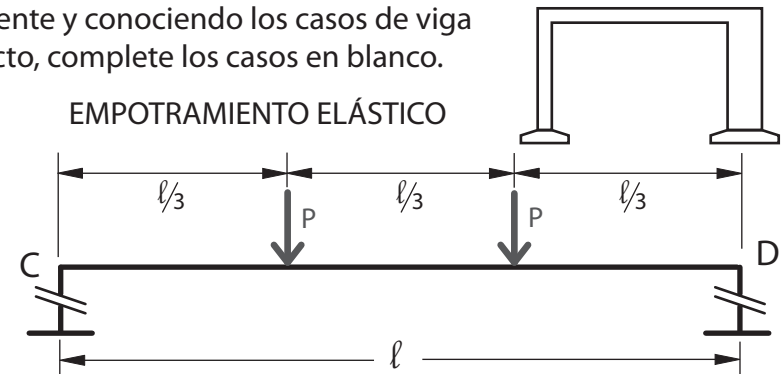


Diagrama de esfuerzo de corte



**EMPOTRAMIENTO ELÁSTICO**



$M_C$   $M_D$



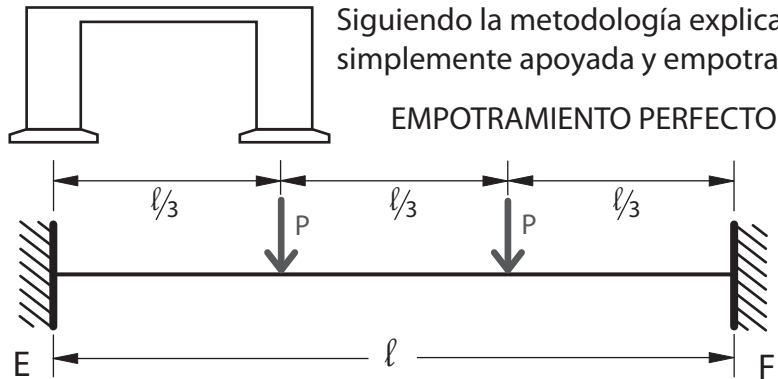
$V_C$



$V_D$

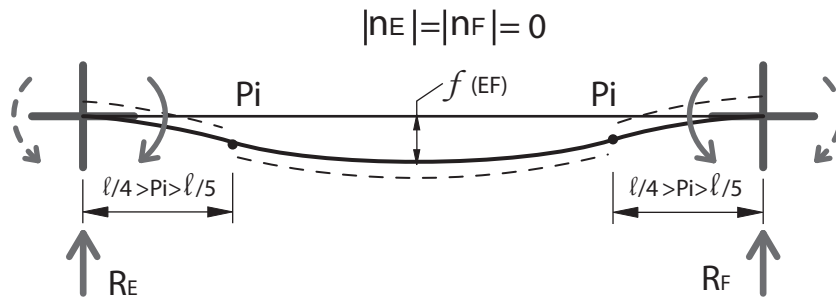


# Ejercicio de vigas (aisladas de su contexto) con dos cargas puntuales P iguales

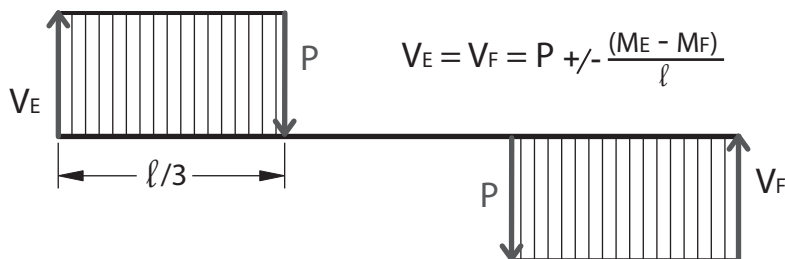
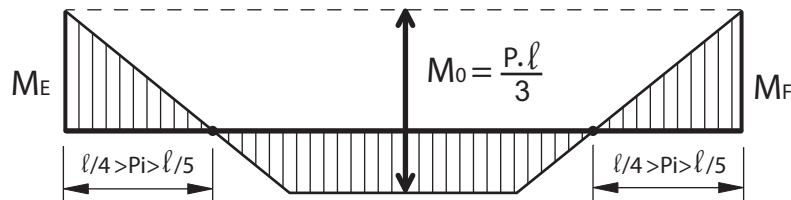


Siguiendo la metodología explicada anteriormente y conociendo los casos de viga simplemente apoyada y empotramiento perfecto, complete los casos en blanco.

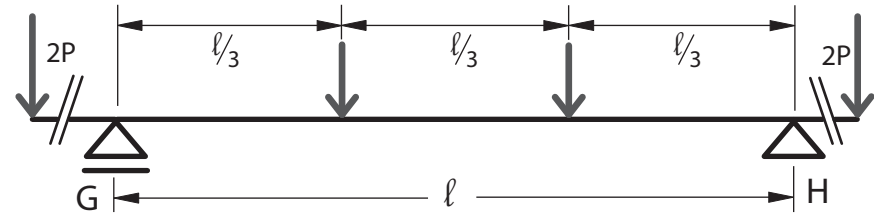
EMPOTRAMIENTO PERFECTO



$$M_E = M_F = \frac{2}{3} M_0$$



EMPOTRAMIENTO MAS QUE PERFECTO



Esquemas de cargas

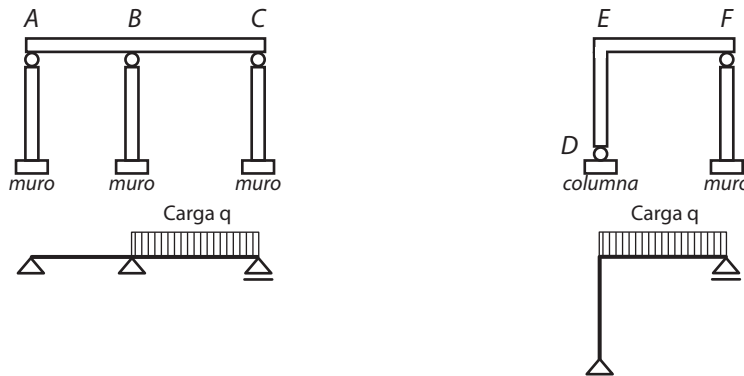
Deformada con sus reacciones

Diagrama de momento flector

Diagrama de esfuerzo de corte

[Figura 37]

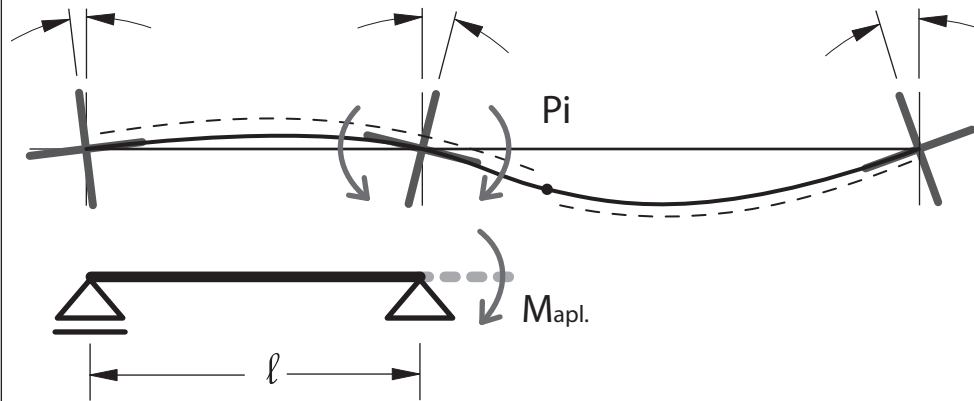
Ejemplos estructurales en vista y sus esquemas de cargas



[Figura 38]

Deformada de la viga ABC de la figura 37

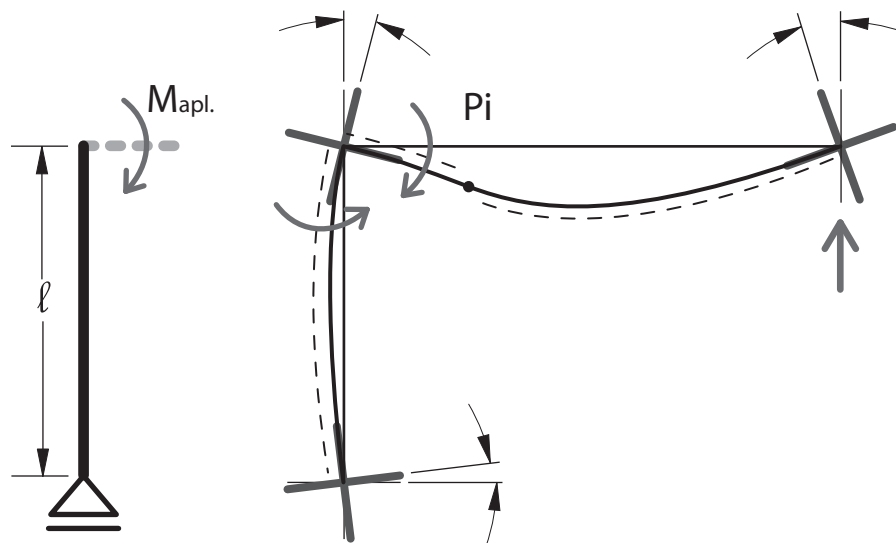
Esquema de carga de la viga AB aislada de su contexto.



[Figura 39]

Deformada del pórtico DEF de la figura 37

Esquema de carga de la columna DE aislada de su contexto.



## Barras sin carga

Hasta el momento hemos analizado vigas que de una u otra forma reciben carga directamente, ahora analizaremos aquellas que no tienen cargas (considerando el peso propio despreciable) pero las vigas contiguas le transmiten un giro.

El análisis que haremos, se centrará principalmente en vigas, pero también es aplicable a columnas, teniendo en cuenta que la continuidad puede ser viga-viga o viga columna.

En la [Figura 37] vemos dos ejemplos estructurales en vista y su esquema de carga correspondiente. Veremos comparativamente como se comporta uno y otro, y llegaremos a la conclusión de que conceptualmente son iguales.

Analicemos su deformada [Figura 38]: primero analizamos la viga cargada aisladamente. El nudo de la derecha (C) gira libremente como si fuera una viga simplemente apoyada, por lo que no hay cambio de curvatura ni punto de inflexión (vease caso de la pág. 14). El nudo de la izquierda (B), tiene continuidad con la viga AB, por lo tanto se comporta como empotramiento elástico, con cambio de curvatura y punto de inflexión menor a la luz/5.

Ahora, para analizar la viga descargada AB, lo que vamos a hacer es aislarla de su contexto y reemplazar la viga BC por el momento aplicado que provoca el giro del nudo. De aquí en adelante, cada vez que veamos esta simbología, significa que la viga tiene continuidad y una viga o columna le esta aplicando un momento.

En la [Figura 39] se muestra el mismo comportamiento de la viga EF (con las mismas características que la viga BC), y vemos en la figura que la columna DE trabaja igual. Al lado vemos como representamos esquemáticamente esta situación.



## Barra sin carga con un momento aplicado en un extremo y el otro articulado.

Este es el caso de la hoja anterior donde un momento aplicado genera un giro sobre el nudo [Figura 40].

El giro deforma la viga como se muestra en la [Figura 41], transmitiendo al otro extremo de la barra un giro de sentido contrario. Como el nudo A es una articulación, este giro será la mitad del giro producido en el nudo B. Observemos que la deformada no tiene punto de inflexión, es decir que no hay cambio de curvatura en la deformada. Por lo tanto, las tracciones estarán de un solo lado (estaran arriba o abajo, según el sentido del  $M_{apl.}$ ), arriba en este caso.

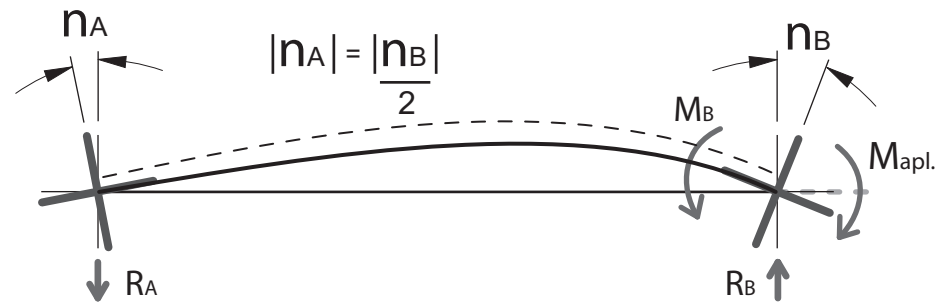
Como dijimos anteriormente, el D.M.F. está relacionado directamente con las tracciones: por lo tanto como las tracciones están siempre del mismo lado, el D.F.M. estará del mismo lado [Figura 42]. Notese que en el nudo A el momento vale 0, esto es porque es una articulación y en nudo de la derecha, el momento vale  $M_B$ , es decir lo que la viga reacciona ante el momento aplicado. En este caso particular,  $M_B$  vale lo mismo que  $M_{apl.}$ .

Cuando analizamos las reacciones, vemos que como no hay carga, las únicas fuerzas reactivas que encontramos son las de la cupla que equilibra el momento interno de la viga  $M_B$  [Figura 43].

Con las reacciones podemos armar el D.E.C., mirando la viga de izquierda a derecha: la primera fuerza que nos encontramos es  $R_A$ , entonces la colocamos partiendo de su inicio, y en el sentido en que se encuentra. No vamos desplazando hacia la derecha, y la única fuerza que encontramos es  $R_B$ , la cual colocamos llegando al nudo B [Figura 44].



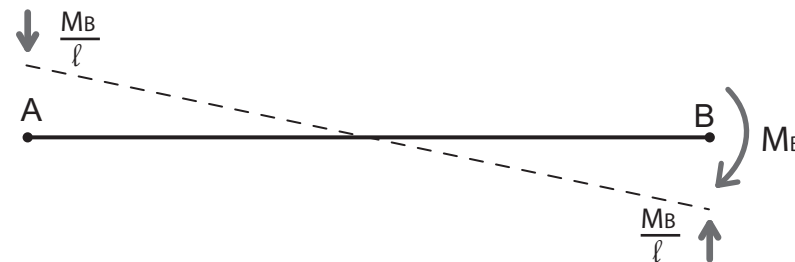
[Figura 40]  
Esquema de carga de viga simplemente apoyada y momento aplicado



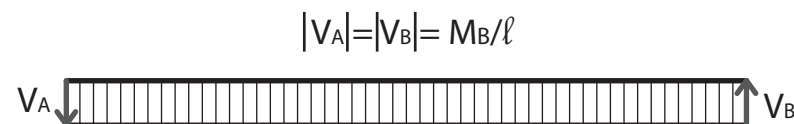
[Figura 41]  
Deformada de la viga de la Figura 40



[Figura 42]  
D.M.F. de la viga de la Figura 40

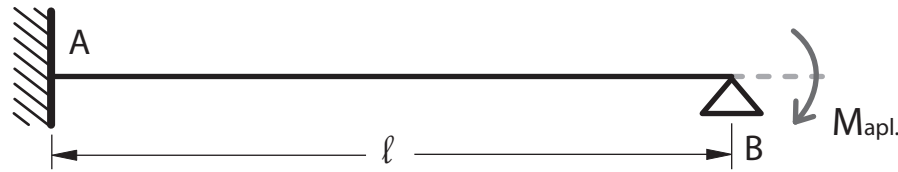


[Figura 43]  
Reacciones: cupla reactiva

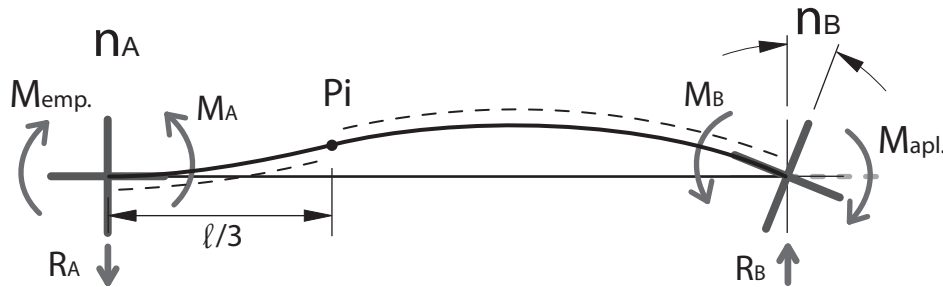


[Figura 44]  
D.E.C. de la viga de la Figura 40

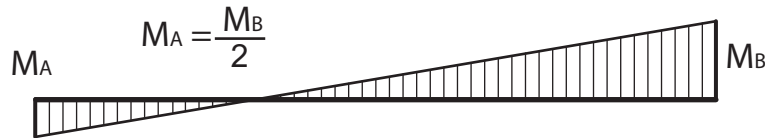
[Figura 45]  
Esquema de carga de viga con empotramiento perfecto a la izquierda y momento aplicado



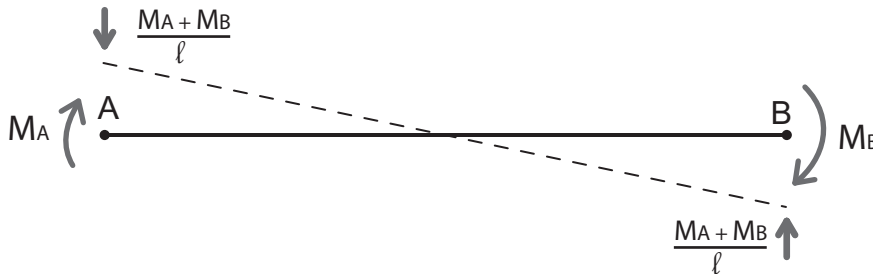
[Figura 46]  
Deformada de la viga de la Figura 45



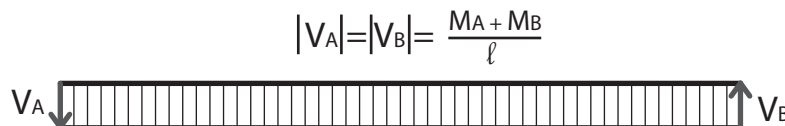
[Figura 47]  
D.M.F. de la viga de la Figura 45



[Figura 48]  
Reacciones: cupla reactiva



[Figura 49]  
D.E.C. de la viga de la Figura 45



## Barra sin carga con un momento aplicado en un extremo y el otro empotrado perfectamente.

Un momento aplicado genera un giro sobre el nudo y el otro nudo está empotrado perfectamente [Figura 45].

El giro deforma la viga como vemos en la [Figura 46] y el empotramiento en el otro nudo le impide el giro. Esto genera un cambio en la curvatura de la deformada, generándose un punto de inflexión exactamente al tercio de la luz de la viga.

También el empotramiento perfecto toma momento, por lo tanto habrá un momento de empotramiento o reactivo.

En cuanto al diagrama de momento, vemos que el momento aplicado genera un momento interno ( $M_B$ ), que se ve reflejado en el DMF. El momento de empotramiento del otro nudo también genera un momento interno ( $M_A$ ) de valor absoluto igual a la mitad del momento aplicado [Figura 47].

Cuando analizamos las reacciones, al igual que en el caso anterior, vemos que como no hay carga, las únicas fuerzas reactivas son las de la cupla que equilibra la suma de los momentos internos de la viga  $M_B$  y  $M_A$  [Figura 48].

Con estas reacciones armamos el D.E.C. [Figura 49].

## Barra sin carga con un momento aplicado en un extremo y el otro con empotramiento elástico.

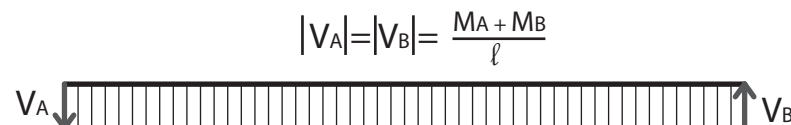
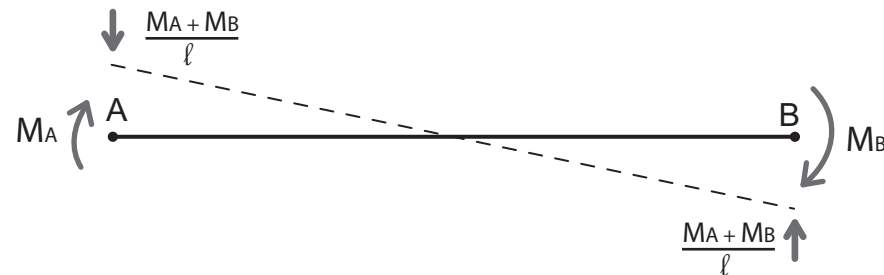
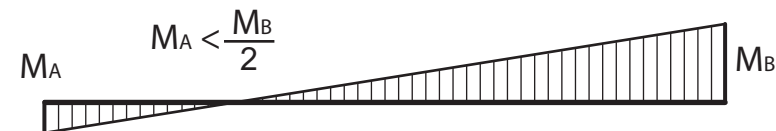
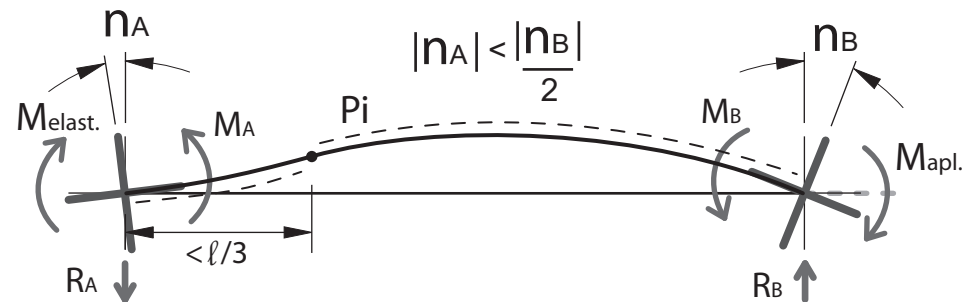
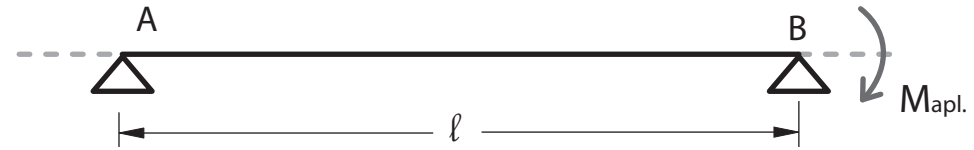
Al igual que hemos hecho en capítulos anteriores, comparamos los casos extremos: empotramiento perfecto y articulación.

En cuanto al giro, podemos decir que está entre la entre cero y la mitad del giro de B.

El  $P_i$ , se acerca al nudo A, ya que se encuentra entre  $1/3$  de la luz y el apoyo.

El momento en A, será menor que  $M_B/2$ , debido a que el nudo es menos rígido.

Al disminuir  $M_A$ , disminuye (en muy poca medida, pero disminuye) el valor de las reacciones, por lo tanto disminuye el valor del corte.



[Figura 50]  
Esquema de carga de viga con empotramiento elástico a la izquierda y momento aplicado

[Figura 51]  
Deformada de la viga de la Figura 50

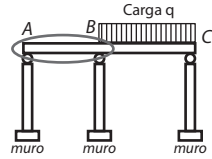
[Figura 52]  
D.M.F. de la viga de la Figura 50

[Figura 53]  
Reacciones: cupla reactiva

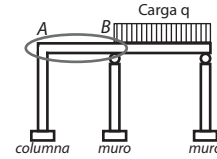
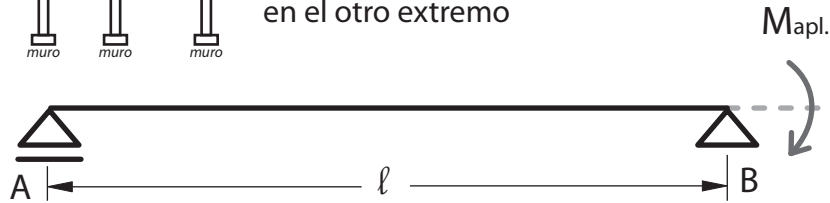
[Figura 54]  
D.E.C. de la viga de la Figura 50

# Resumen de barras sin carga con un momento aplicado en un extremo

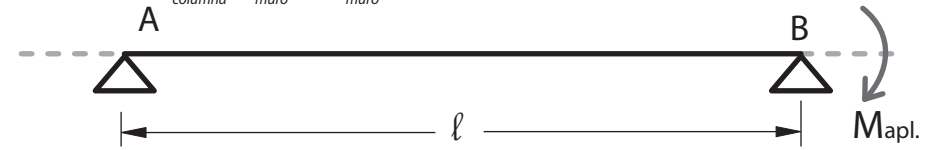
Esquemas de cargas



ARTICULADA en el otro extremo



EMPOTRAMIENTO ELÁSTICO en el otro extremo



Deformada con sus reacciones

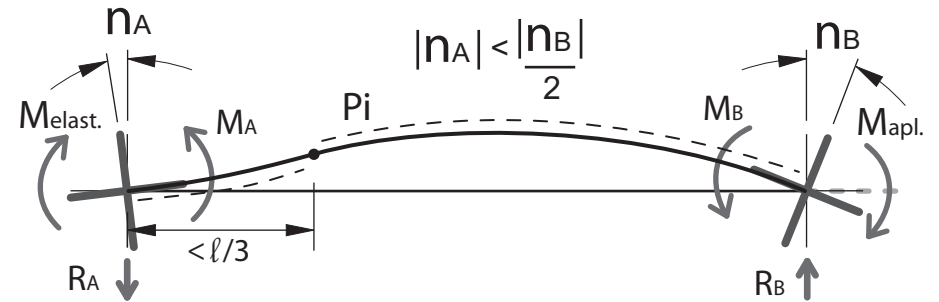
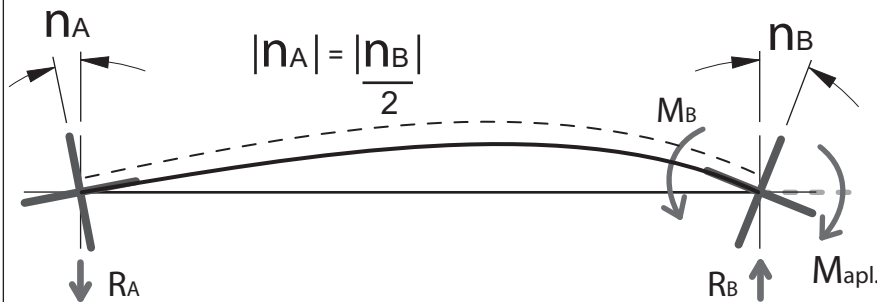


Diagrama de momento flector

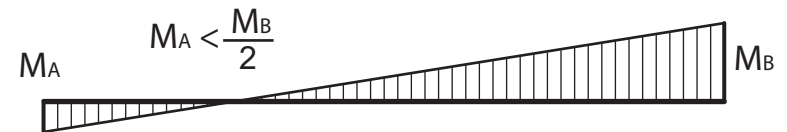
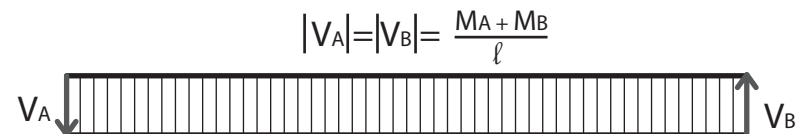
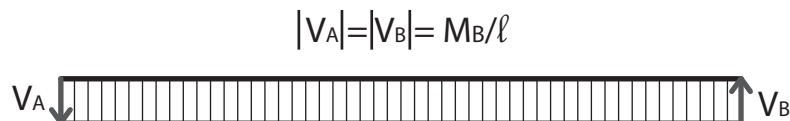
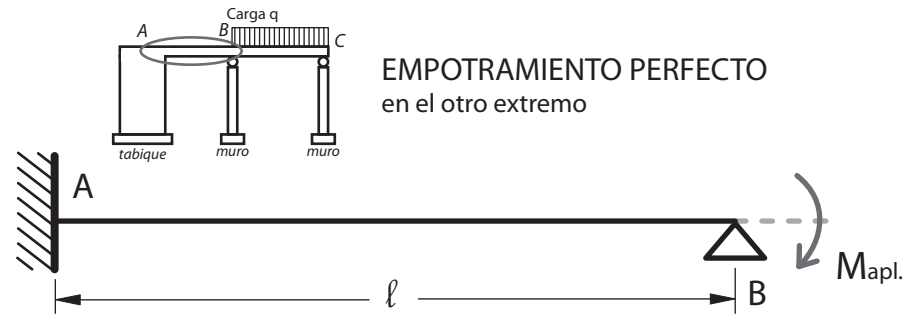


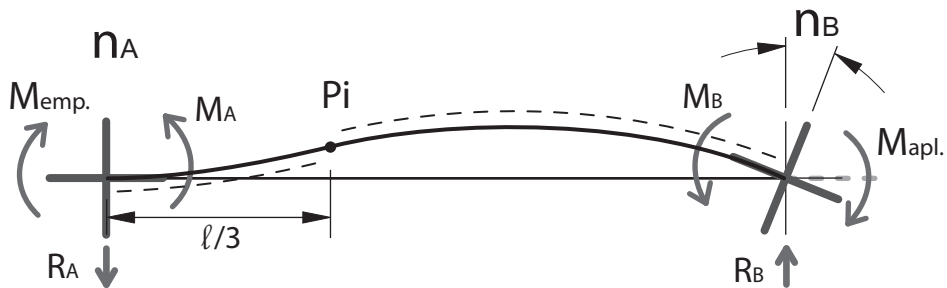
Diagrama de esfuerzo de corte



# Resumen de barras sin carga con un momento aplicado en un extremo



Esquemas de cargas



Deformada con sus reacciones

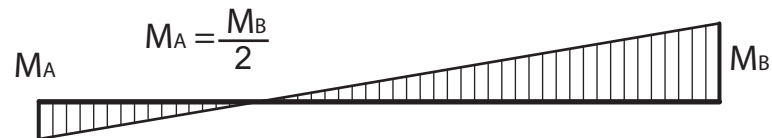


Diagrama de momento flector

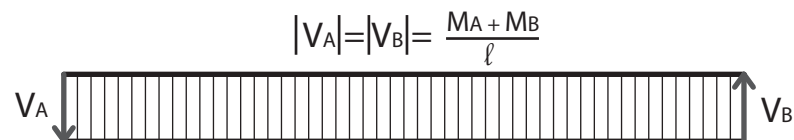
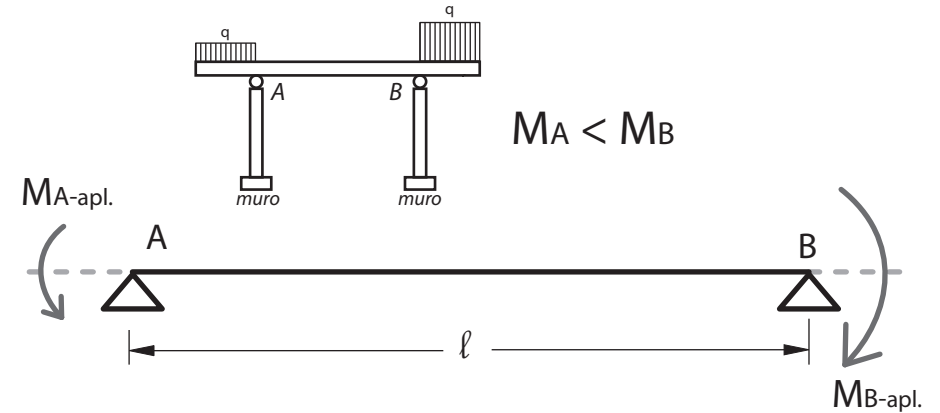
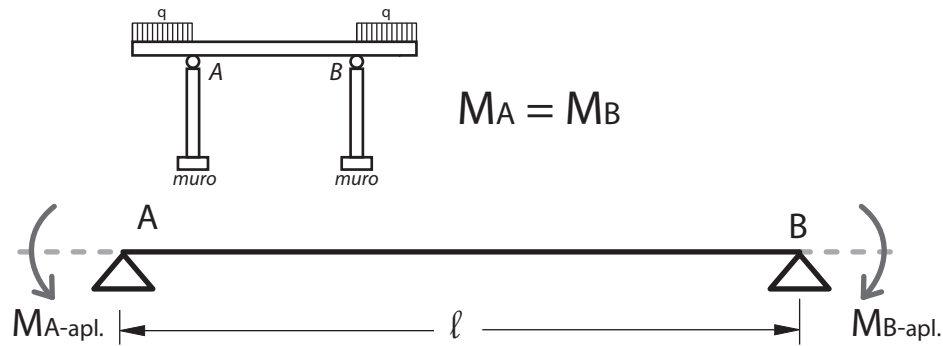


Diagrama de esfuerzo de corte

# Resumen de barras sin carga con dos momentos aplicados de sentido contrario

Esquemas de cargas



Deformada con sus reacciones

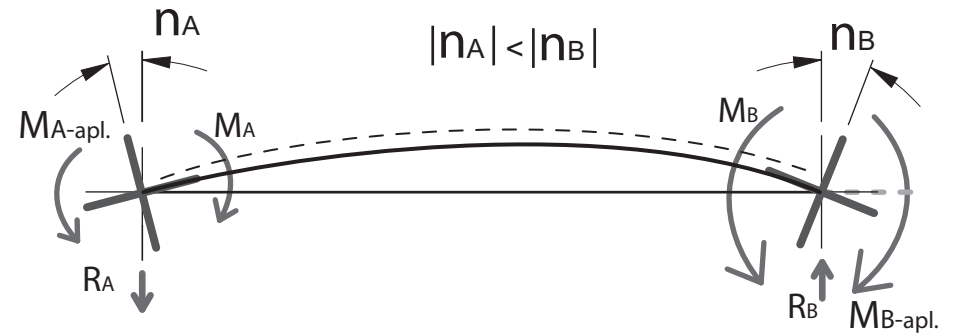
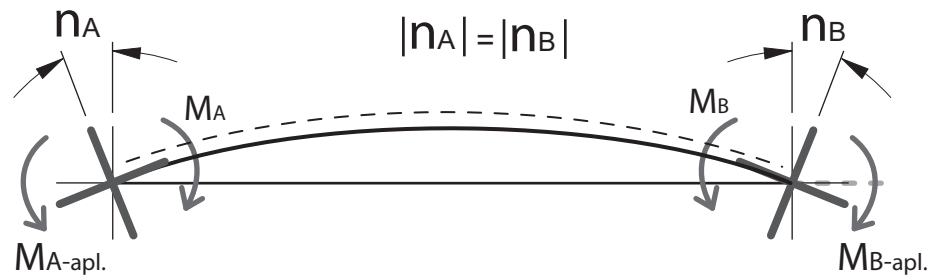


Diagrama de momento flector

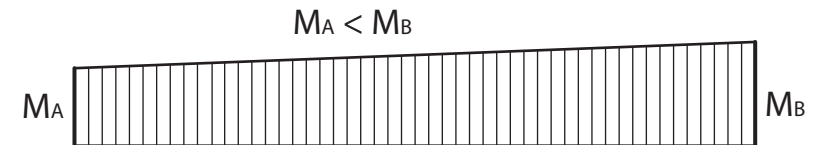
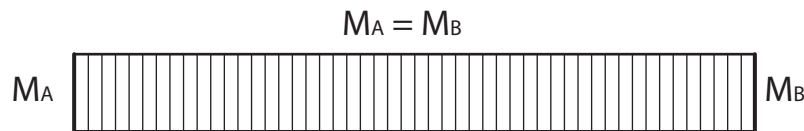
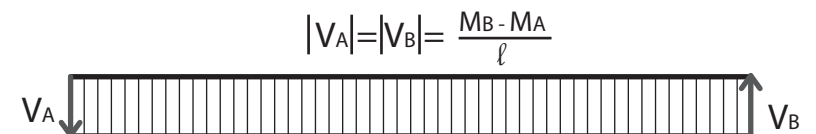
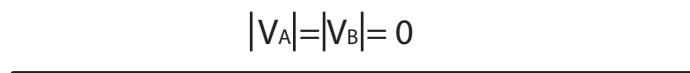
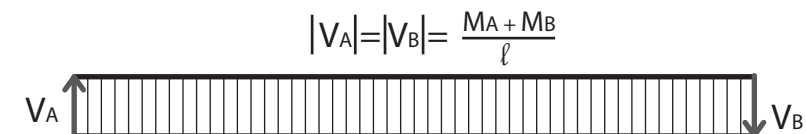
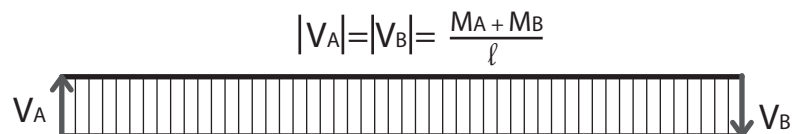
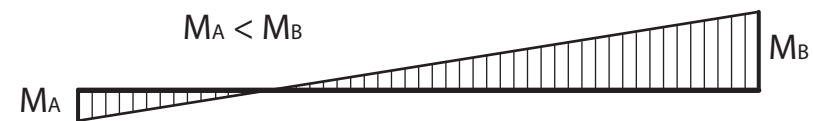
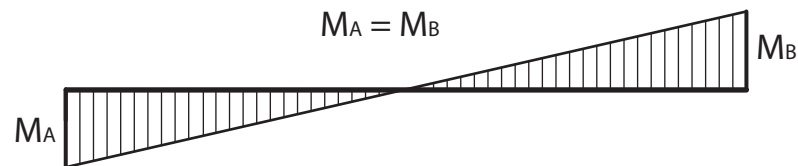
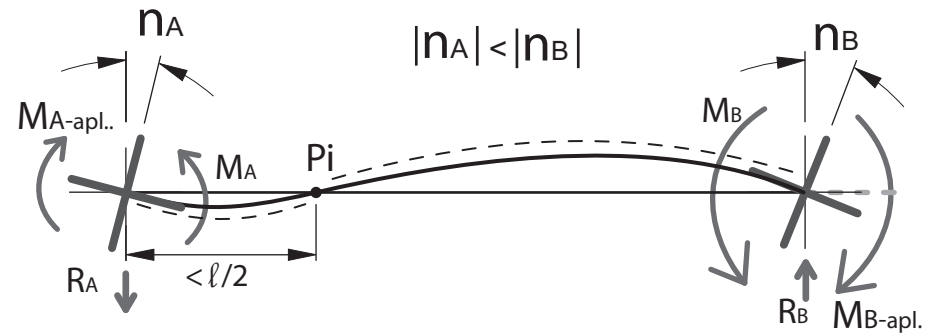
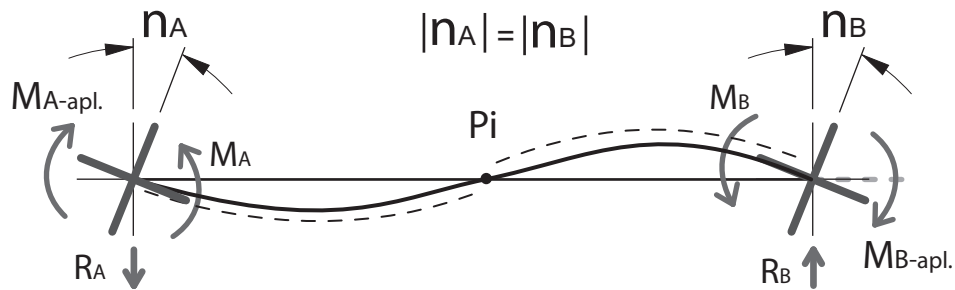
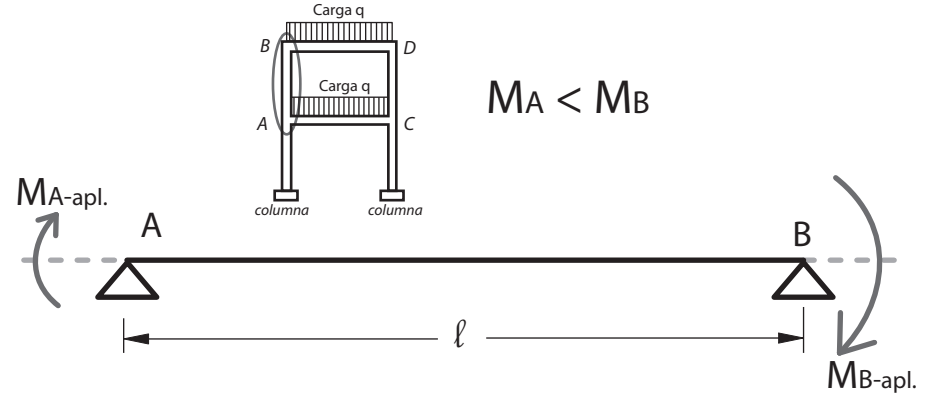
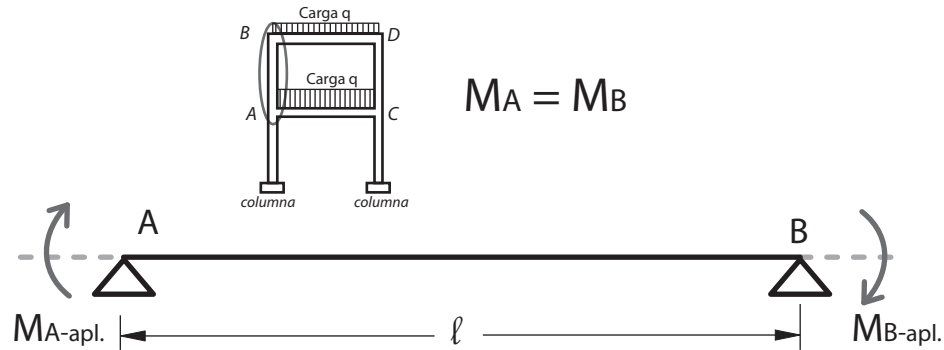


Diagrama de esfuerzo de corte



# Resumen de viga sin carga con dos momentos aplicados de igual sentido



Esquemas de cargas

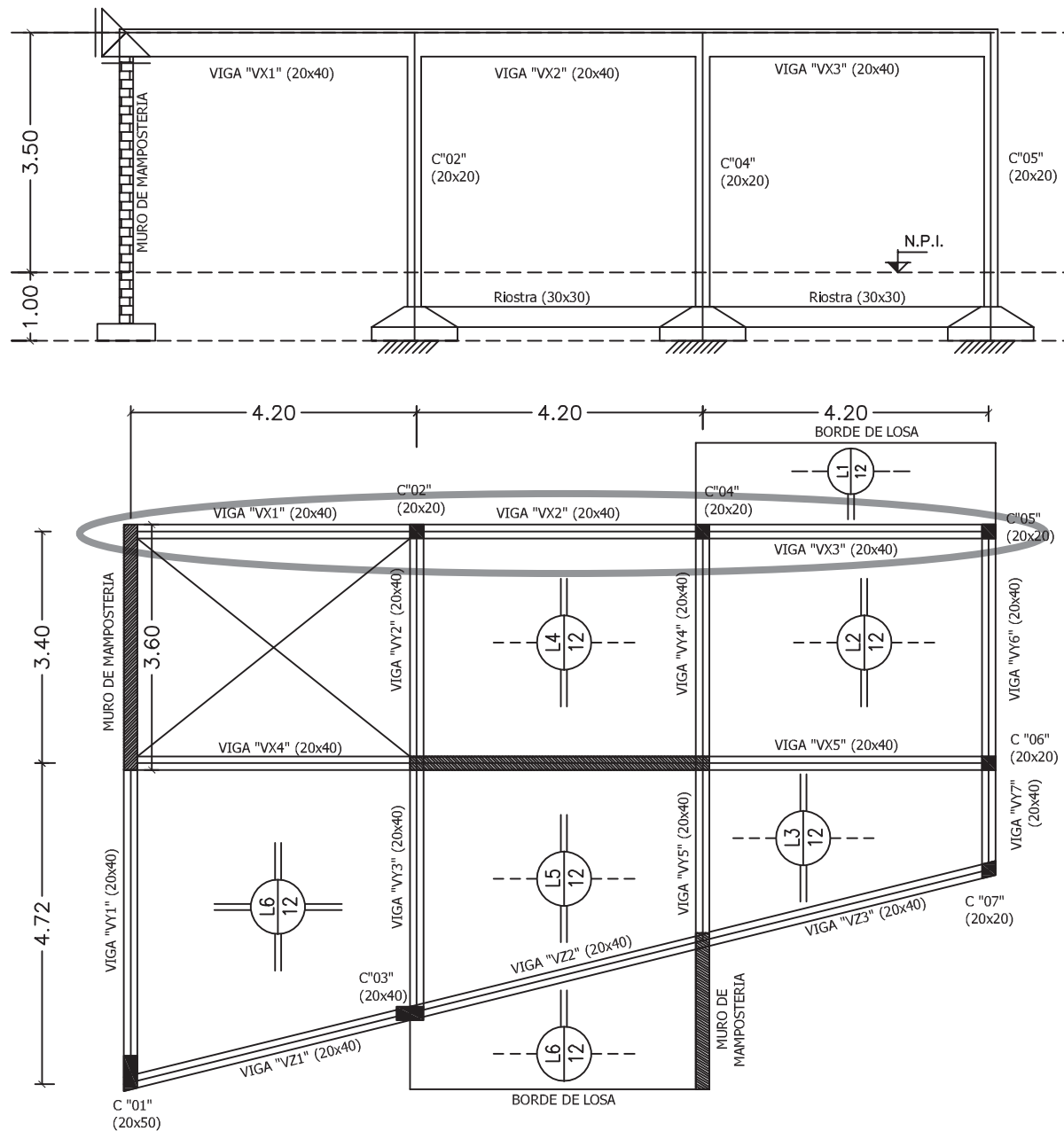
Deformada con sus reacciones

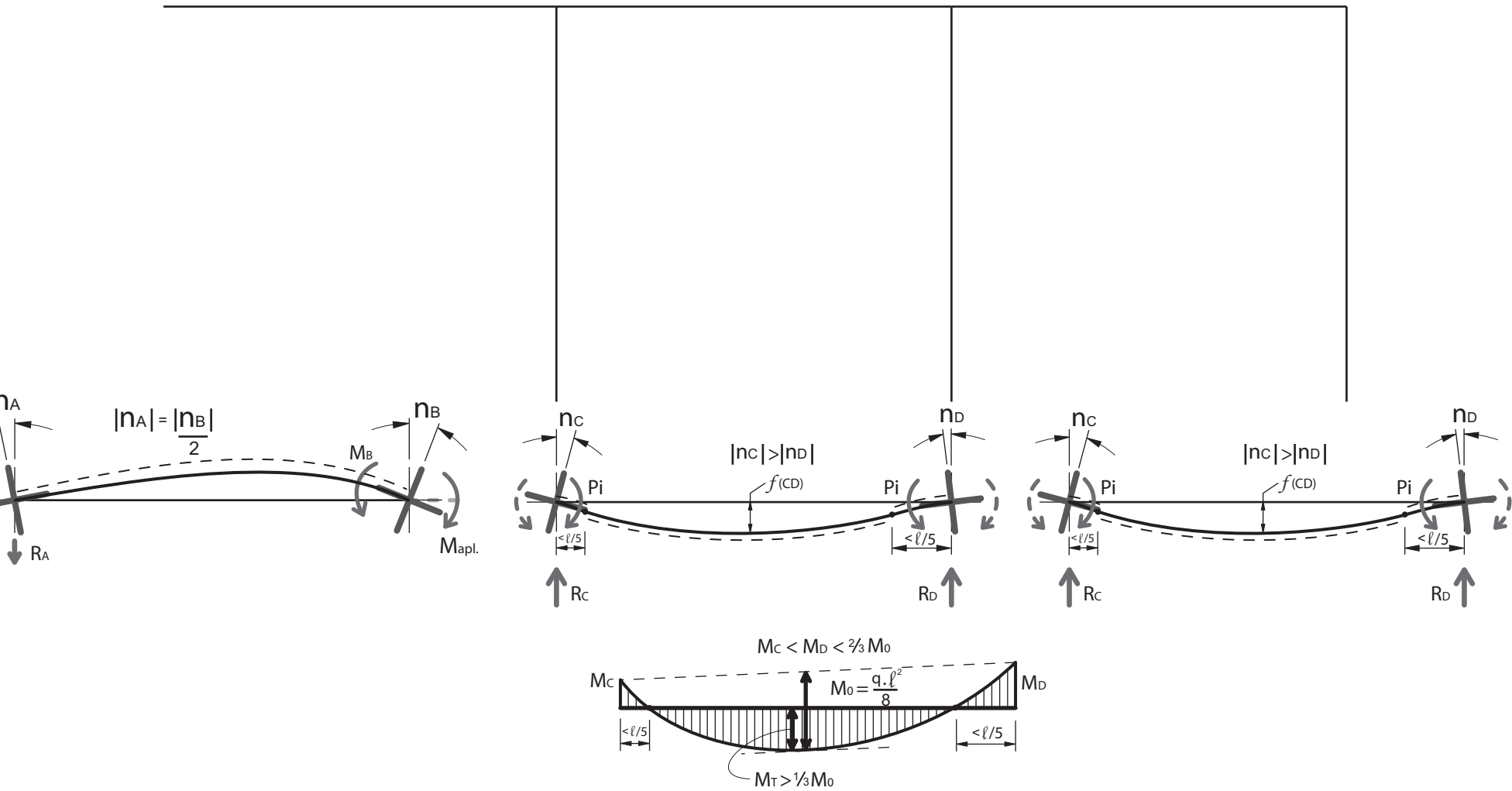
Diagrama de momento flector

Diagrama de esfuerzo de corte

# Ejemplo de resolución de una deformada

explicación de como se rebaten los planos. Modelado.





Esquemas  
de cargas

Deformada  
con sus  
reacciones

Diagrama  
de momento  
flector

Diagrama  
de esfuerzo  
de corte

















