

Cónicas

Matemática II
Arquitectura
F.A.U.D. U.N.C

Recordemos que al comenzar el estudio de la Geometría Analítica plana, decíamos que la misma usa el álgebra y el cálculo para estudiar las propiedades de las curvas en el plano XY . Su idea fundamental es establecer una correspondencia entre una ecuación $F(x, y) = 0$ y su lugar geométrico. Una de las ideas centrales de la geometría analítica es que dado un lugar geométrico o una curva, sus propiedades pueden deducirse en forma algebraica o analítica a partir de su ecuación. En base a estas premisas deducimos la ecuación de la recta.

Para poder localizar puntos en el plano que representen el lugar geométrico de una ecuación dada, recurriamos al uso de los sistemas de coordenadas, que nos permitían el nexo entre el álgebra y la geometría.

Siguiendo con este método de análisis estudiaremos las secciones cónicas y a partir de los lugares geométricos correspondientes a cada una de ellas, deduciremos sus ecuaciones matemáticas.

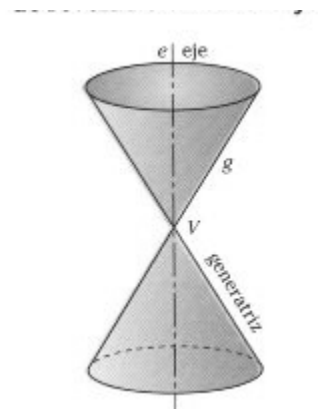
Para definir las cónicas desde el punto de vista geométrico, debemos previamente conocer que es una superficie cónica. En el Núcleo temático N° 3 abordaremos con mayor profundidad el estudio de las distintas familias de superficies, ahora nos concentraremos sólo en las que llamamos cónicas.

La superficie cónica forma parte de la familia de las **superficies regladas**

Definición:

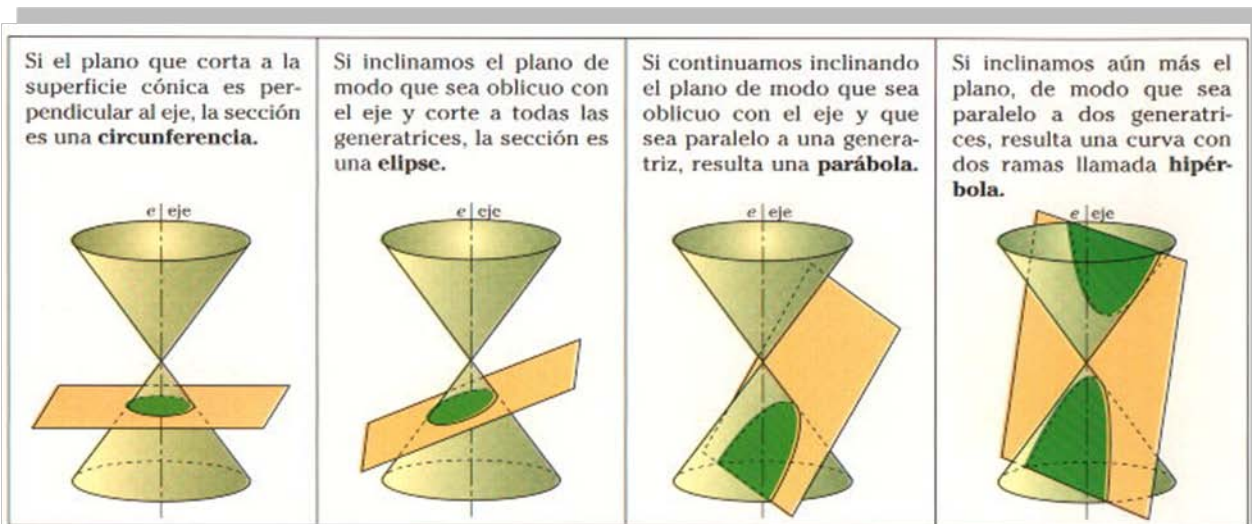
Una superficie reglada es aquella que puede ser engendrada por el movimiento de una línea recta. La línea recta en movimiento en cualquiera de sus posiciones, se llama generatriz de la superficie.

Superficie cónica: superficie reglada generada por el movimiento de una recta generatriz (g), manteniéndose en contacto con una directriz (d) curva, teniendo, todas las posiciones de la generatriz (g), un punto común (V), denominado vértice. La superficie cónica es una superficie reglada, radiada de generatrices concurrentes.



CONICAS:

De la intersección de una superficie cónica circular y un plano que no pasa por el vértice, según la inclinación del plano resultan distintas curvas; circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Estas curvas reciben el nombre de cónicas.



Dependiendo si el plano de corte pasa o no por el vértice de la superficie cónica resultarán

- **Cónicas verdaderas: el plano secante no pasa por el vértice del cono.**
- **Cónicas degeneradas: el plano secante pasa por el vértice del cono.**

Desde la geometría analítica:

El lugar geométrico de los puntos cuya relación de distancias a un punto y una recta fijos es constante recibe el nombre de sección cónica o simplemente cónica. El punto fijo se llama *Foco de la cónica*, la recta fija *directriz de la cónica*. La relación constante se llama *excentricidad* y se representa generalmente con la letra *e*

Las secciones cónicas se clasifican en tres categorías según su forma y propiedades. Estas se establecen de acuerdo con los valores de la excentricidad “*e*”

Si $e < 1$ la cónica se llama elipse

Si $e = 1$ la cónica se llama parábola

Si $e > 1$ la cónica se llama hipérbola

Muchos autores consideran a la Circunferencia como un caso particular de la elipse donde la excentricidad $e = 0$. En la circunferencia los dos focos se confunden y son a su vez el centro de la cónica.

La excentricidad en la elipse mide, por tanto, lo que ésta se aleja de la circularidad.

La ecuación general de las cónicas verdaderas o degeneradas, es una ecuación polinómica de segundo grado en x e y , en donde A, B, C no podrán ser iguales a cero simultáneamente.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{No nulos a la vez}$$

En donde los coeficientes **A, B, C, D, E, y F**, son números reales que determinan el tipo de Curva correspondiente que, en caso de existir, tendremos: **dos líneas rectas**, **un punto**, una **línea recta**, la **circunferencia**, la **parábola**, la **elipse** o una **hipérbola**.

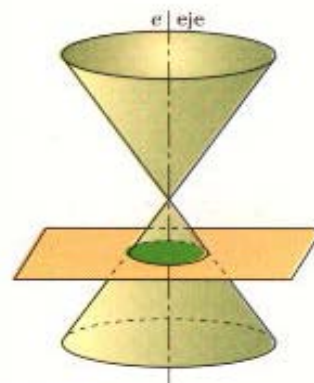
Desarrollaremos cada una de las secciones cónicas, iniciando el estudio por las cónicas cerradas: **Circunferencia y Elipse** y posteriormente las cónicas abiertas: **Parábola e Hipérbola**.

Secciones Cónicas cerradas: LA CIRCUNFERENCIA

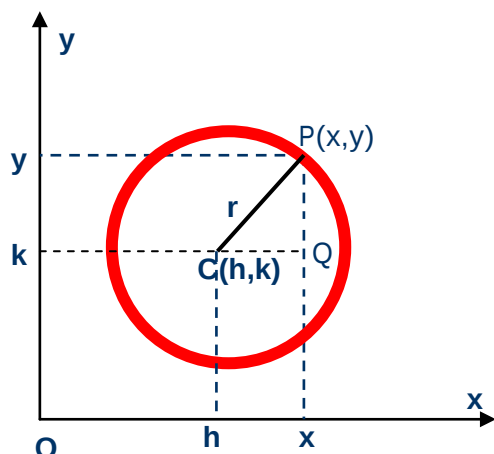
Geométricamente una circunferencia resulta de la intersección de una superficie cónica circular con un plano, que no pasa por el vértice del cono y es perpendicular al eje del mismo.

En geometría analítica: Se llama circunferencia al lugar geométrico del conjunto de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo dado en ese plano. El punto fijo se llama Centro y la distancia al mismo se llama radio.

Los Elementos de la Circunferencia son: Centro **C(h ; k)** y radio **r**



A partir del lugar geométrico que se muestra, el cual corresponde a una circunferencia de Centro C y radio R orientada en un Sistema Coordenado Cartesiano Ortogonal vamos a deducir la ecuación matemática que le corresponde.



Elementos de la Circunferencia

C = Centro

r = radio

ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

Sea P(x, y) un punto cualquiera de la Circunferencia de centro **C (h,k)** y radio **r**

Por definición P debe satisfacer la condición geométrica definida.

$$|CP| = r$$

Si consideramos el triángulo $\triangle CQP$ rectángulo, en donde CP es la hipotenusa $CQ = (x - h)$ y $PQ = (y - k)$ sus catetos, podemos aplicar el teorema de Pitágoras y escribir la relación **CP = r** en forma analítica de la siguiente manera:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

Elevando ambos miembros al cuadrado

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Que es la ecuación de la circunferencia de centro C (h ;k) y radio r.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta es la **ecuación Ordinaria** de la circunferencia

Si la circunferencia tiene su centro C (h ;k) coincidente con el origen del sistema de coordenadas tendremos entonces:

$$h = k = 0 \text{ y la ecuación será } (x)^2 + (y)^2 = r^2$$

$$(x)^2 + (y)^2 = r^2$$

Esta es la **ecuación canónica** de la circunferencia.

Desarrollo algebraico para obtener la Ecuación general de la circunferencia.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Si desarrollamos la ecuación ordinaria

$$x^2 + (2x(-h)) + (-h^2) + y^2 + (2y(-k)) + (-k^2) = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

y ordenando los términos de acuerdo a las potencias decrecientes de x e y

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \quad (1)$$

Si comparamos esta ecuación con la ecuación general de las cónicas vemos que es un caso especial de la misma en donde $A = C$ y el coeficiente $B = 0$ (que de hecho es una condición necesaria para que la ecuación general de las cónicas represente una circunferencia)

Como h , k , y r son números, datos del problema conocemos el valor de

- $2h$ al que llamaremos D ;

el de $-2k$ que llamaremos E

y el de $h^2 + k^2 - r^2$ que llamaremos F .

De esta manera si reemplazamos en la ecuación (1) la misma tomará la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Que es la **ecuación General** de la Circunferencia

Analizando la ecuación vemos que

$$D = -2h$$

$$\therefore h = -D/2$$

$$E = -2k$$

$$\therefore k = -E/2$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2 \quad \therefore r^2 = h^2 + k^2 - F \quad \text{si extraemos la raíz cuadrada en ambos miembros}$$

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - F} = r = \sqrt{x^2 + y^2 - F}$$

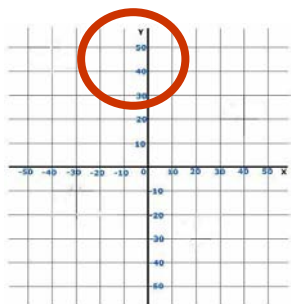
Lo que nos permite determinar el valor de las Coordenadas de Centro y la medida del radio, en consecuencia poder realizar el gráfico de una circunferencia cuando se conoce su ecuación general.

Para tener en cuenta:

Para que una ecuación de 2º grado sea de una circunferencia se deben presentar las siguientes características:

1. Ser una ecuación de segundo grado respecto de las variables x e y
2. No contener el término rectangular es decir el término en xy
3. Los coeficientes de x e y -términos cuadráticos- tienen que ser iguales.

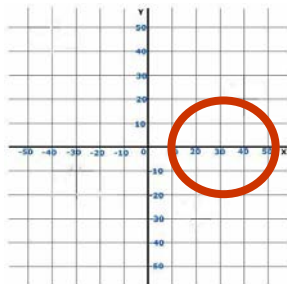
Ecuaciones Incompletas de la circunferencia $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$



$$D = 0 \quad h = -D/2$$

$$\text{Será } h = 0$$

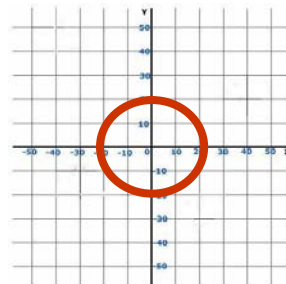
$$x^2 + y^2 + Ey + F = 0$$



$$E = 0 \quad K = -E/2$$

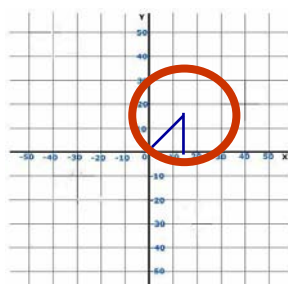
$$\text{Será } K = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + F = 0$$



$$D = E = 0$$

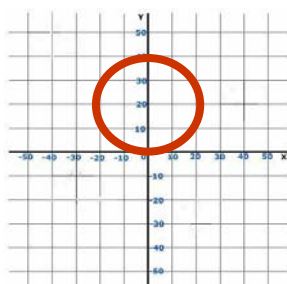
$$x^2 + y^2 + F = 0$$



$$F = 0 \quad h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

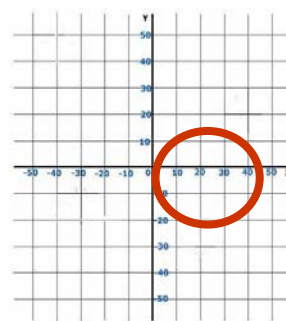
$$h^2 + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey = 0$$



$$D = F = 0$$

$$x^2 + y^2 + Ey = 0$$



$$E = F = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx = 0$$

En la ecuación se presentan casos de coeficientes nulos.

Según sean esos coeficientes la circunferencia ocupa posiciones particulares como podemos ver en la lámina que se adjunta

- Si $D = 0$ al ser $h = -D/2$ será $h = 0$

El centro de la circunferencia está, entonces sobre el eje de ordenadas.

- Si $E = 0$ al ser $k = -E/2$ será $k = 0$

El centro de la circunferencia está sobre el eje de abscisas.

- Si $D = E = 0$

El centro de la circunferencia coincide con el origen del SCC.

- Si $F = 0$ resulta $h^2 + k^2 - r^2 = 0$, entonces $h^2 + k^2 = r^2$

La circunferencia pasa por el origen SCC

- Si $D = F = 0$ $h = 0$

La circunferencia es tg al eje x en el origen.

- Si $E = F = 0$

La circunferencia es tg al eje y en el origen.

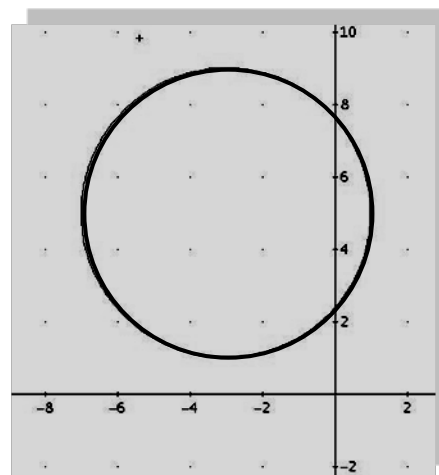
Ejemplos

1. Dar la ecuación de una circunferencia de centro en $C(-3;5)$ y radio $r = 4$

Datos $h = -3$ $k = 5$ $r = 4$

Respuesta:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 4^2$$



2.

- a) Expresar de qué lugar geométrico es la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$
- b) Determinar sus elementos fundamentales.
- c) Determinar sus intersecciones con los ejes coordenados x e y.
- d) Representar el lugar geométrico.

Respuesta:

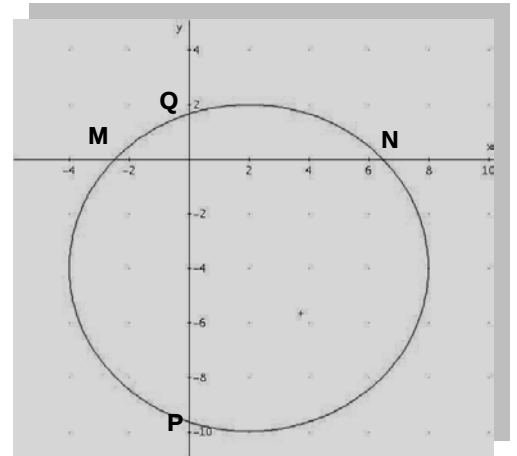
- a) Es la ecuación de una circunferencia porque es de 2º grado respecto de x e y. Además si revisamos la ecuación veremos que falta el término rectangular xy y los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales.
- b) Elementos fundamentales.
Coordenadas del Centro (h,k) y valor del radio r

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$$

$$h = -\frac{-4}{2} = 2$$

La abscisa del Centro $h = 2$

$$k = -\frac{8}{2} = -4$$



La ordenada del Centro $k = -4$

$$F = h^2 + k^2 - r^2 \quad \therefore \quad r^2 = \sqrt{h^2 + k^2 - F} \quad r^2 = \sqrt{2^2 + (-4)^2 - (-16)} = 6$$

El valor del radio $r = 6$

c) Intersección con los ejes coordenados:

Con el Eje X

Haciendo **$y = 0$** la ecuación **queda**

$$x^2 - 4x - 16 = 0$$

resolviendo la ecuación general de 2do Grado $X_1, X_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_1 = 2 - 2\sqrt{5} \quad y \quad x_2 = 2 + 2\sqrt{5}$$

Los valores aproximados de los puntos de intersección con el eje X serán M (-2.8; 0) y N(6.3; 0)

Con el eje y

Haciendo **$x = 0$**

$$y^2 + 8y - 16 = 0$$

$$y_1 = -4\sqrt{2} - 4 \quad y_2 = 4\sqrt{2} - 4$$

Los valores aproximados de los puntos de intersección con el eje y serán P (0; -9.7) y Q (0; 1.7)

3. Escriba la ecuación de la circunferencia cuyo centro esta en (-2;1) y cuyo radio es 3
Represente gráficamente en un sistema Coordenado Cartesiano. 2D

Respuesta:

La ecuación es $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

4. Trazar el lugar geométrico de la ecuación $x^2 + y^2 - 3x + 6y - 5 = 0$

Respuesta:

Resolvemos completando cuadrados por separado.

Primero completamos los cuadrados en x y luego los cuadrados en y

$$x^2 - 3x + [9/4] + y^2 + 6y + [9] = 5 + [9/4] + [9]$$

Se ha transpuesto el "5". Los corchetes indican los términos que se han añadido para completar cuadrados.

Para completar el cuadrado en x se eleva al cuadrado la mitad del coeficiente de x y sumamos este nro a ambos miembros de la igualdad. $(1/2) \cdot 3 = (3/2)^2$.

De igual manera procedemos para completar el cuadrado en y $(1/2) \cdot 6 = (3)^2$

El resultado anterior podría expresarse

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = \frac{65}{4}$$

Esta expresión tiene precisamente la forma ordinaria de la ecuación, en consecuencia el gráfico de la circunferencia será con centro en las coordenadas $(3/2; -3)$ y el valor del radio =

$$r = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{65}$$

Intersección de una recta y una circunferencia

Sea la Circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ (1)
y la recta $y = x + 3$ (2) Hallar la intersección

Desarrollo del cálculo $\rightarrow$ Reemplazando el valor de la variable y de la ecuación (2) por el valor de y de la ecuación (1)

$$x^2 + (x + 3)^2 - 4x - 6(x + 3) + 9 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 4x - 6x - 18 + 9 = 0$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 - 4x - 6x - 18 + 9 = 0$$

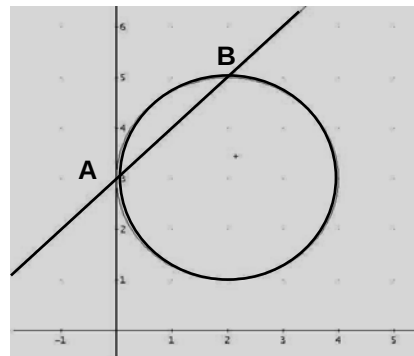
$$2x^2 - 4x = 0$$

cuyas raíces son: $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$

sustituyendo estos valores en (2) resulta:

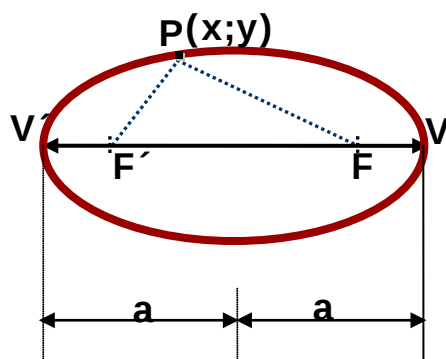
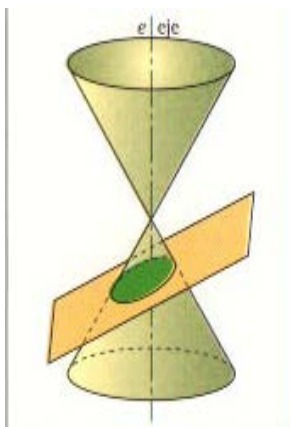
$$y_1 = 3 \quad y_2 = 5$$

Las coordenadas de los puntos de intersección son entonces A $((0;3))$ y B $(2;5)$



***Cálculos y Gráficos realizados con DERIVE 6

Secciones Cónicas cerradas: LA ELIPSE



P- punto perteneciente a la elipse

F, F' – focos

V, V' - Vértices

$$FP + F'P = 2a = \text{eje mayor}$$

DEFINICIÓN:

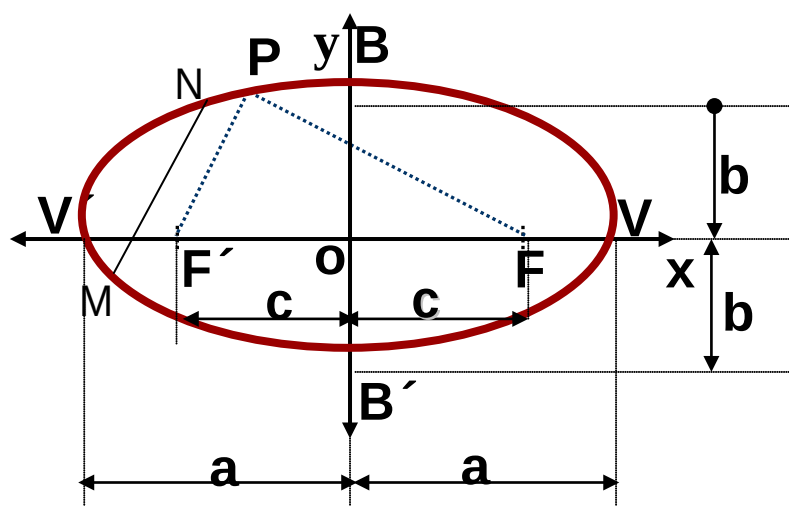
Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la **suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante positiva e igual a la distancia entre los vértices, es decir, igual a la medida del eje mayor.**

Recordamos que se llama **lugar geométrico** al conjunto de puntos formados por el producto entre dos conjuntos, tales que un subconjunto de ellos satisfacen una propiedad y que solo estos puntos satisfacen dicha propiedad. El **foco o focos** se refiere a uno o varios puntos especiales para cierta familia de curvas, y en cada una de ellas se define diferente. Los focos de la elipse son exactamente dos puntos fijos a los que la suma de las distancias a cualquier otro punto de la elipse es constante.

Un poco de historia....

La elipse, como curva geométrica, fue estudiada por Menaechmus, investigada por Euclides, y su nombre se atribuye a Apolonio de Perge. El foco y la directriz de la sección cónica de una elipse fueron estudiadas por Pappus. En 1602, Kepler creía que la órbita de Marte era ovalada, aunque más tarde descubrió que se trataba de una elipse con el Sol en un foco. De hecho, Kepler introdujo la palabra «focus» y publicó su descubrimiento en 1609. Halley, en 1705, demostró que el cometa que ahora lleva su nombre trazaba una órbita elíptica alrededor del Sol.

• ELEMENTOS FUNDAMENTALES DE LA ELIPSE:



o: centro de la elipse

2a: diámetro mayor o eje mayor

2b: diámetro menor o eje menor

2c: distancia focal .

V, V', B, B' : Vértices

F, F' : Focos de la elipse

FF' : Eje focal recta que pasa por los focos

a : semieje mayor

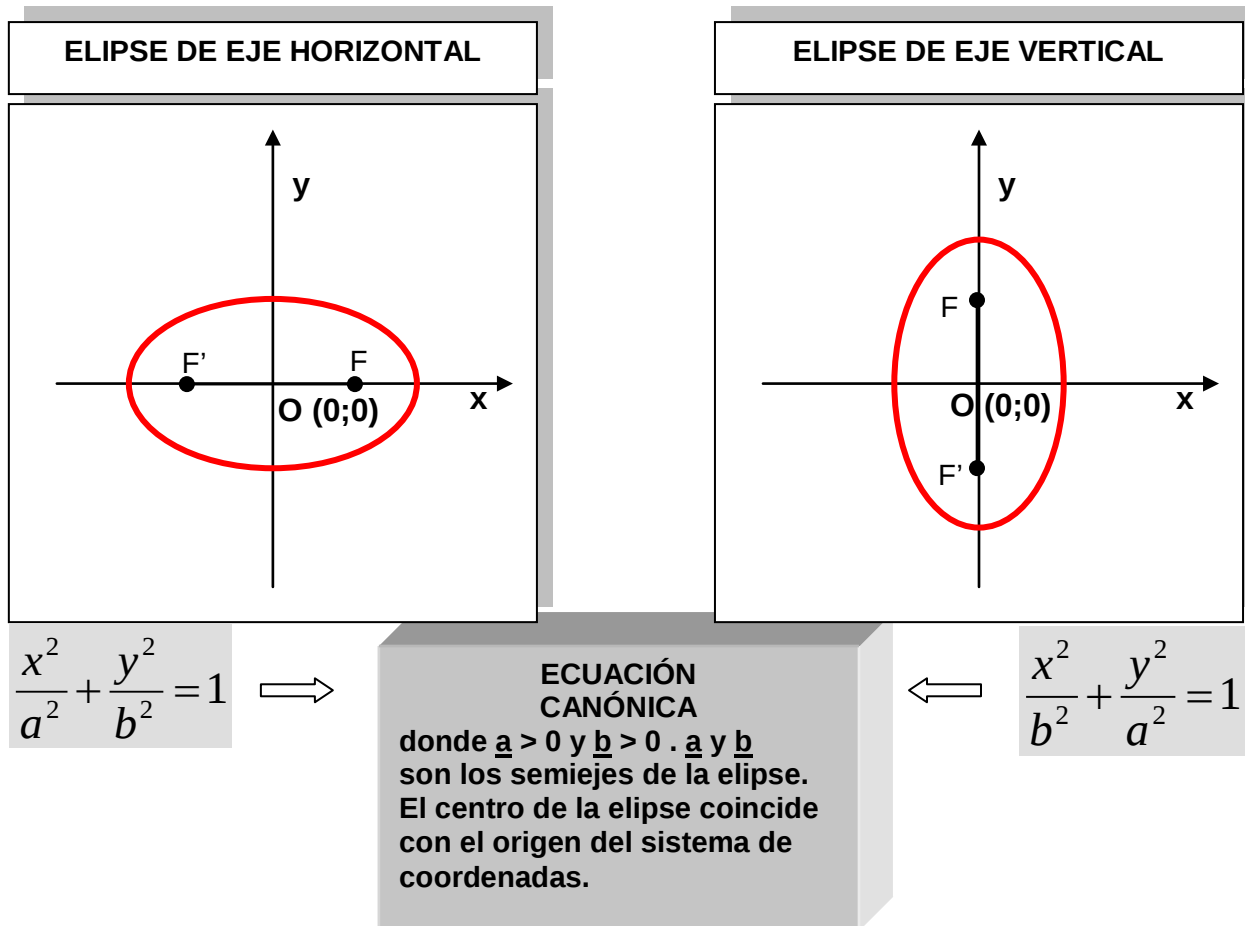
b : semieje menor

c : semieje focal

MN: cuerda

Sobre el «eje mayor» se ubican los focos. El punto P puede estar ubicado en cualquier lugar del perímetro de la elipse.

- ECUACIÓN DE LA ELIPSE EN COORDENADAS CARTESIANAS CON CENTRO EN EL ORIGEN DEL SISTEMA



Ejemplos...

1) Dada una elipse centrada de eje horizontal, cuyo eje mayor es igual a 12 m y su eje menor igual a 8 m. ¿Cuál es su ecuación?

R: $x^2 / 36 + y^2 / 16 = 1$ donde $a = 6$ $b = 4$ porque $2a = 12$ y $2b = 8$

2) Dada una elipse centrada de eje vertical, cuyo eje mayor es igual a 24 m y su eje menor igual a 16 m. ¿Cuál es su ecuación?

R: $x^2 / 64 + y^2 / 144 = 1$ donde $a = 12$ $b = 8$ porque $2a = 24$ y $2b = 16$.

3) Dada la ecuación de la elipse:

$$x^2 / 9 + y^2 / 4 = 1$$

Responde si se trata de una elipse centrada, define las medidas de sus ejes mayor y menor y de sus semiejes.

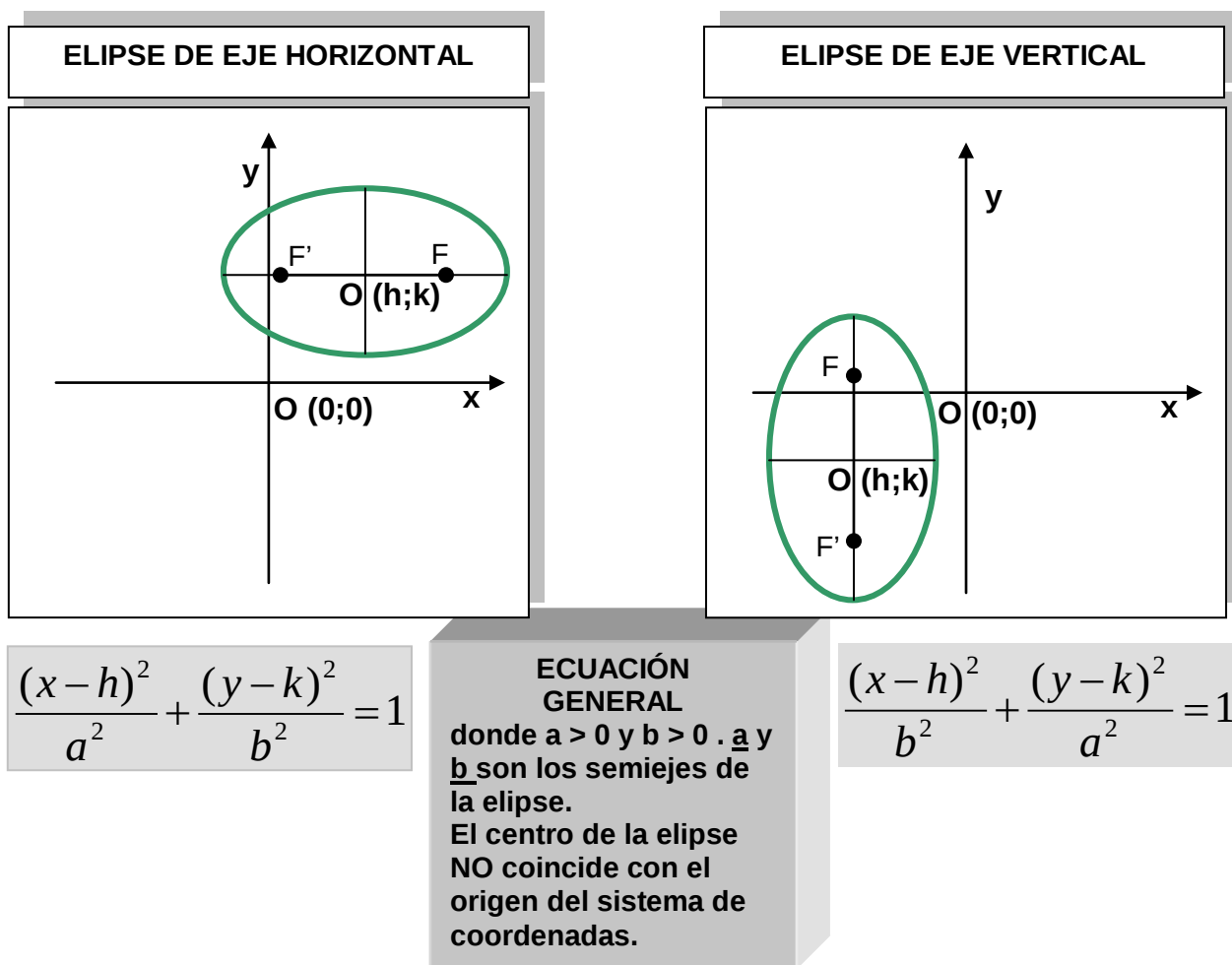
R: Se trata de una elipse centrada de eje horizontal (el semieje mayor es denominador de x^2) donde $a = 3$ $2a = 6$ $b = 2$ $2b = 4$

Fórmulas útiles:

Área interior de una elipse : $A = \pi \cdot a \cdot b$ Siendo a y b los semiejes mayor y menor.

Longitud o perímetro de una elipse : $P \approx 2 \pi \sqrt{\frac{1}{2} (a^2 + b^2)}$

- ECUACIÓN DE LA ELIPSE EN COORDENADAS CARTESIANAS CON CENTRO NO COINCIDENTE CON EL ORIGEN DEL SISTEMA



Ejemplos...

4) Dada una elipse desplazada, de eje horizontal, cuyo eje mayor es igual a 18 m y su eje menor igual a 6 m. El centro de la misma tiene coordenadas cartesianas (-1; 5).

¿Cuál es su ecuación? ¿En qué cuadrante del plano cartesiano se ubica el centro de la elipse?

R: $(x+1)^2 / 81 + (y-5)^2 / 9 = 1$ donde $a = 9$ $b = 3$ porque $2a = 18$ y $2b = 6$
Centro posicionado en el segundo cuadrante.

5) Dada la ecuación de la elipse:

$$(x-3)^2 / 25 + (y+4)^2 / 6,25 = 1$$

Definir las coordenadas del foco, si la elipse es de eje vertical u horizontal y las medidas de sus ejes y de sus semiejes. ¿En qué cuadrante se posiciona el centro de la elipse?

R: Es una elipse de eje horizontal, desplazada. Coordenadas del Centro O (3;-4).
 $a = 5$ $b = 2,5$ $2a = 10$ $2b = 5$
Centro posicionado en el cuarto cuadrante-

Para graficar la elipse, se pueden utilizar diferentes métodos de construcción

- **DETERMINACIÓN DE LOS FOCOS DE LA ELIPSE**

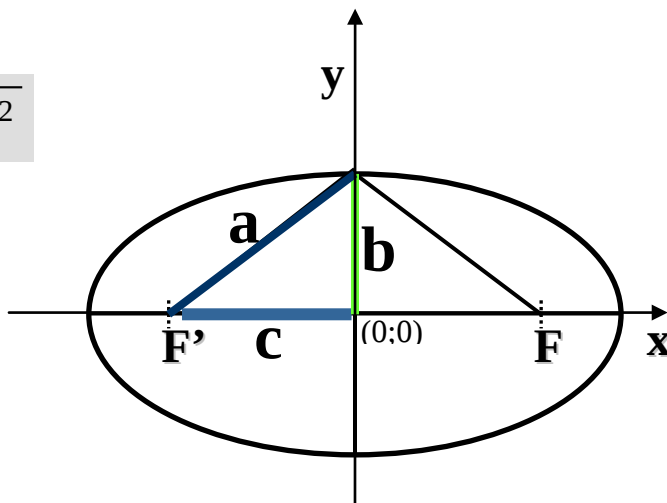
En toda elipse se verifica que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Luego las coordenadas cartesianas de los focos son:

$F (c; 0)$ y $F' (-c; 0)$ para la elipse del ejemplo gráfico y

$F (0; c)$ y $F' (0; -c)$ para la elipse centrada de eje vertical, con eje focal coincidente con el eje “y”.



Ejemplos...

6) Determinar las coordenadas cartesianas de los focos de la elipse del ejercicio 3.

Ecuación de la elipse:

$$x^2 / 9 + y^2 / 4 = 1$$

$$a = 3 \quad 2a = 6$$

$$b = 2 \quad 2b = 4$$

Recordamos que es una elipse centrada de eje horizontal, luego las coordenadas cartesianas de los focos serán:

$F (c; 0)$ y $F' (-c; 0)$

Resolviendo:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{3^2 - 2^2} \Rightarrow c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5} = 2,236$$

Por tanto las coordenadas cartesianas de los focos son $F(2,236; 0)$ y $F' (- 2,236 ; 0)$

- **Ubicación gráfica de los focos cuando se conocen “a” (semieje mayor) y “b” (semieje menor)**

7) Retomamos el ejercicio 1) donde $a = 6$ $b = 4$ luego $2a = 12$ y $2b = 8$ y tratándose de una elipse de eje horizontal centrada:

a es la hipotenusa, y b y c son los catetos. Con centro en B y radio a se traza un arco de circunferencia, donde corta al eje mayor se encuentran los focos.

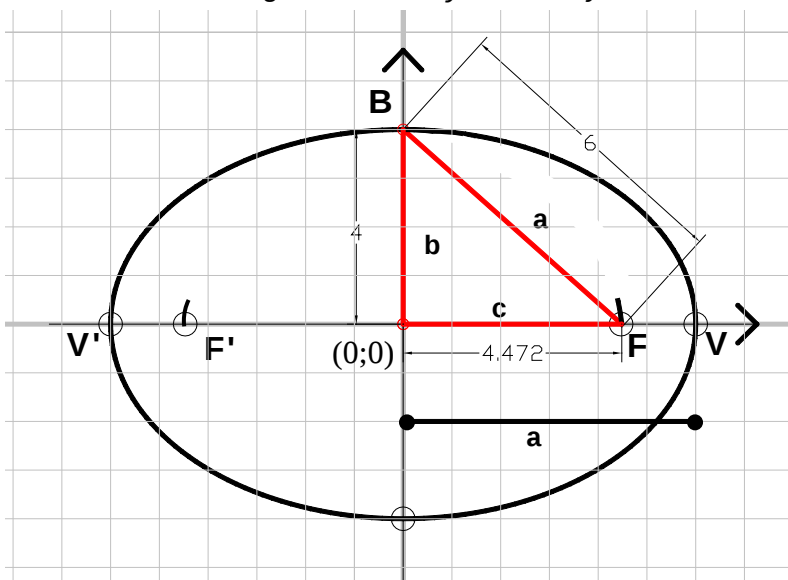
Resolviendo analíticamente:

$$c = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 4,472$$

$$2c \text{ (eje focal)} = 8,944$$

Por tanto las coordenadas cartesianas de los focos son:

$F(4,472; 0)$ y $F' (- 4,472 ; 0)$



- **Coordenadas cartesianas de los focos cuando el centro de la elipse no coincide con el origen del sistema**

Ejemplos...

8) Retomamos el ejercicio 5)

Dada la ecuación de la elipse:

$$(x-3)^2 / 25 + (y+4)^2 / 6,25 = 1$$

Es una elipse de eje horizontal, desplazada. Coordenadas del Centro O (3;-4)

$$a = 5 \quad b = 2,5 \quad 2a = 10 \quad 2b = 5$$

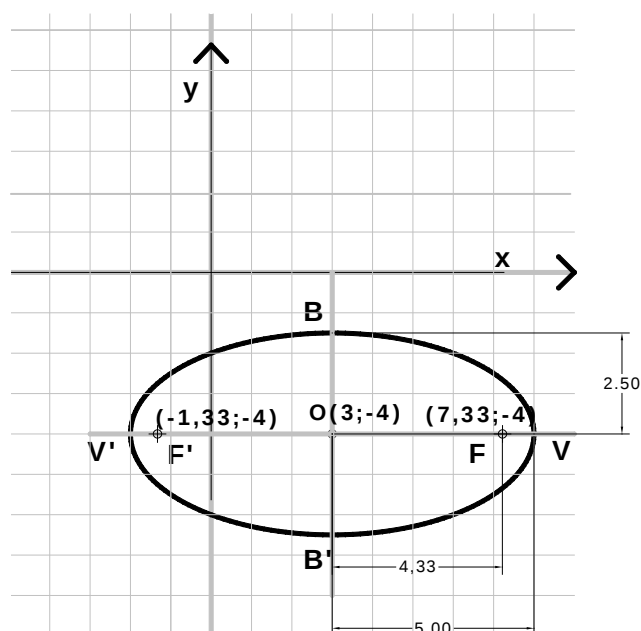
Resolviendo analíticamente:

$$c = \sqrt{25 - 6,25} = \sqrt{18,75} = 4,33$$

$$2c \text{ (distancia focal)} = 8,66$$

Las coordenadas cartesianas de los focos son:

$$F' (-1,33; -4) \text{ y } F (7,33; -4)$$



- **EXCENTRICIDAD DE LA ELIPSE**

La excentricidad de una elipse es la razón entre su semidistancia focal y su semieje mayor. Su valor se encuentra entre cero y uno.

$$e = \frac{c}{a}$$

$$c < a \Rightarrow 0 \leq e < 1$$

Ejemplos...

9) Encontrar la excentricidad de las elipses de los ejercicios 7 y 8

$$\text{En 7) } a = 6 \text{ y } c = 4,47, \text{ luego } e = c/a \Rightarrow e = 4,47 / 6 \Rightarrow e = 0,745$$

$$\text{En 8) } a = 5 \text{ y } c = 4,33, \text{ luego } e = c/a \Rightarrow e = 4,33 / 5 \Rightarrow e = 0,866$$

La excentricidad indica la forma de una elipse; una elipse será más redondeada cuanto más se aproxime su excentricidad al valor cero.

- **LADO RECTO DE LA ELIPSE**

Se denomina *latus rectum* (lado recto) de la elipse a la cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por uno de los focos.

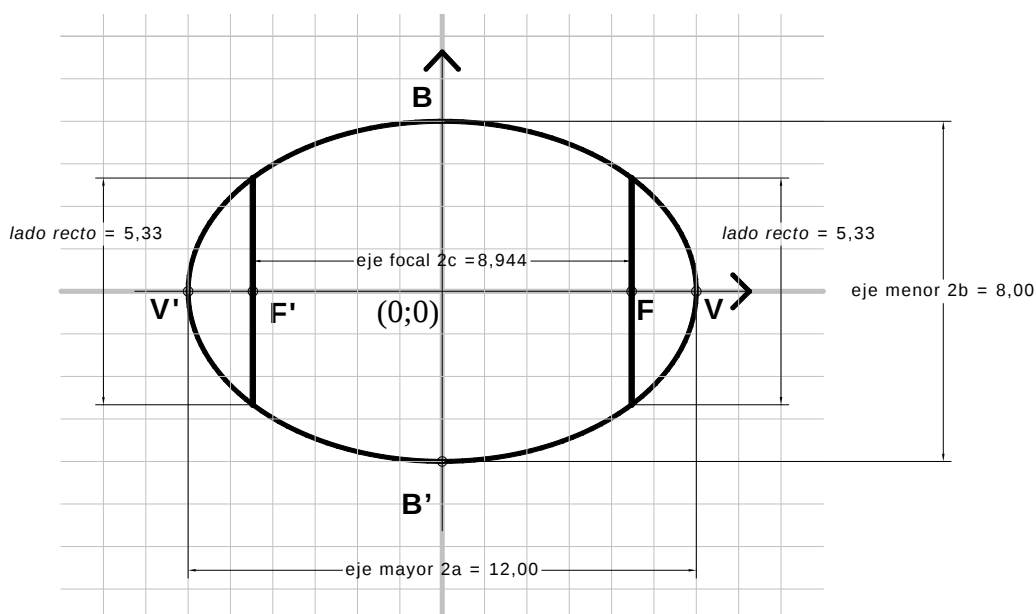
Su longitud es:

$$2b^2/a$$

Ejemplos....

10) En el caso de la elipse del ejercicio 7) el lado recto será:

$$l = 2b^2/a \text{ para } a = 6 \text{ } b = 4, \text{ luego } l = 2 \cdot 4^2/6 \Rightarrow l = 2 \cdot 16/6 \Rightarrow l = 32/6 \Rightarrow l = 5,33$$



- **INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS "X" E "Y"**

- **Intersección de la elipse con el eje "X"**

Elipses con centro en O (0;0)

Para "y" = 0

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \text{ luego:}$$

$$x^2/a^2 + 0^2/b^2 = 1$$

$$x^2/a^2 = 1 \Rightarrow x = \pm a$$

Son los puntos V (a;0) y V' (-a;0)

- **Intersección de la elipse con el eje "Y"**

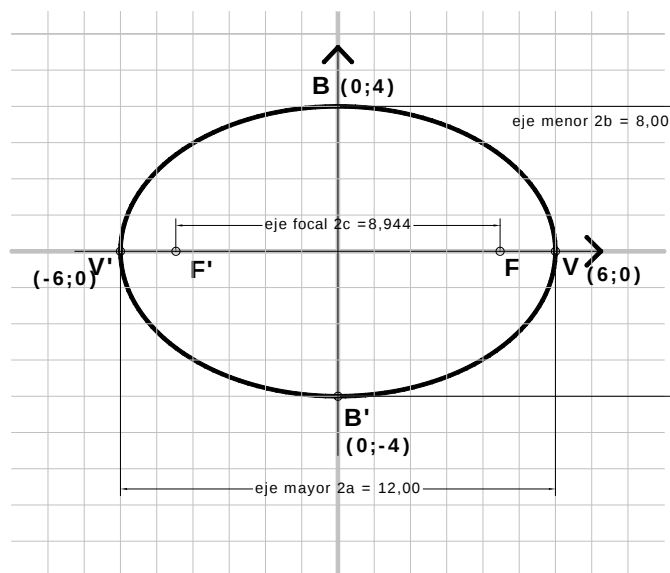
Para "x" = 0

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \text{ luego:}$$

$$0^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

$$y^2/b^2 = 1 \Rightarrow y = \pm b$$

Son los puntos B (0; b) y B' (0;-b)



Tomamos como ejemplo el ejercicio 7

• Intersección de la elipse con el eje "X"

Elipses con centro en O (h;k)

Para "y" = 0

$$(x-h)^2 / a^2 + (y-k)^2 / b^2 = 1 \text{ luego:}$$

$$(x-h)^2 / a^2 + 0^2 / b^2 = 1$$

Resolveremos con el ejemplo del ejercicio 5)

$$(x-3)^2 / 25 + (y+4)^2 / 6,25 = 1$$

Reemplazamos:

$$(x-3)^2 / 25 + (0+4)^2 / 6,25 = 1$$

Luego

$$(x-3)^2 / 25 + 16 / 6,25 = 1$$

$$(x-3)^2 / 25 = 1 - 16 / 6,25$$

$$(x-3)^2 = -1,56 \cdot 25$$

$x = \sqrt{-39} + 3$ (no tiene solución en el campo de los números reales) En este ejemplo la elipse no tiene intersección con "X".

Intersección de la elipse con el eje "y"

Para "x" = 0

Seguimos con el ejemplo

$$(x-3)^2 / 25 + (y+4)^2 / 6,25 = 1$$

Reemplazamos:

$$(0-3)^2 / 25 + (y+4)^2 / 6,25 = 1$$

Luego

$$(-3)^2 / 25 + (y+4)^2 / 6,25 = 1$$

$$9 / 25 + (y+4)^2 / 6,25 = 1$$

$$(y+4)^2 / 6,25 = 1 - 9/25$$

$$(y+4)^2 / 6,25 = 1 - 9/25$$

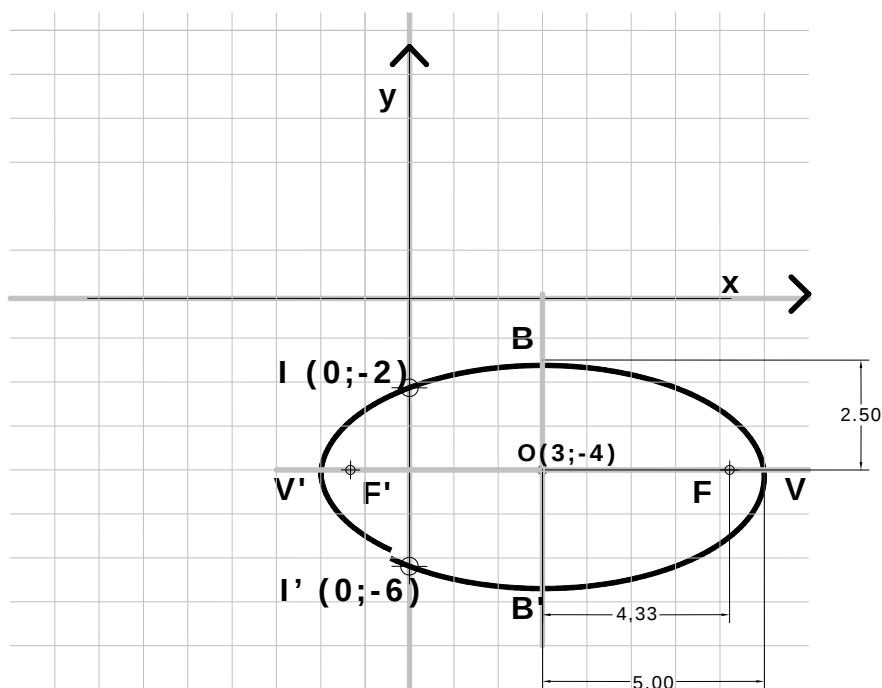
$$(y+4)^2 = 0,64 \cdot 6,25$$

$$y = (\pm \sqrt{4}) - 4$$

$$y = 2-4 \text{ e } y = -2-4$$

$$y = -2 \text{ e } y = -6$$

Son los puntos I (0;-2) y I' (0;-6) como se observa en el gráfico.



$$(x - 3)^2 / 25 + (y + 4)^2 / 6,25 = 1$$

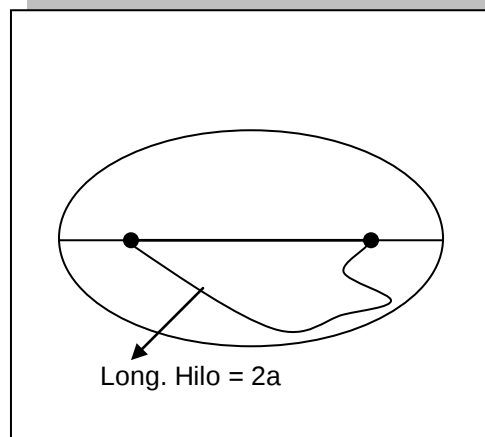
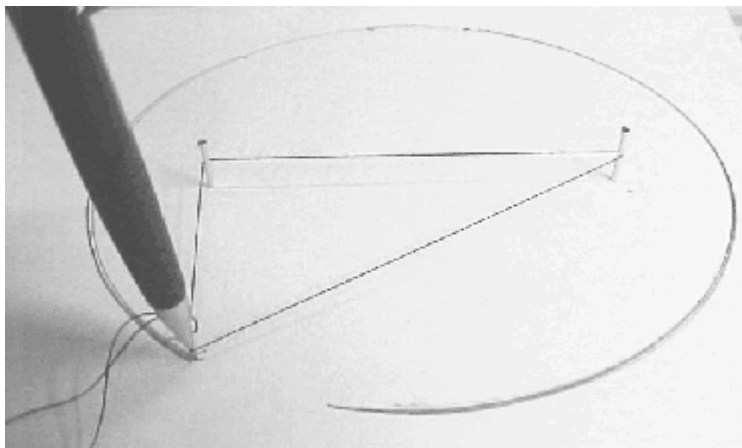
Los mismos procedimientos son válidos para encontrar las intersecciones con los ejes coordenados cuando las elipses son de eje vertical, es decir cuando el eje mayor coincide o es paralelo al eje de las ordenadas

MÉTODOS DE CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE

1- CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE POR TRAZO CONTINUO (del jardinero)

Dados la posición de los focos y el segmento $2a$ (eje mayor), se toma un hilo de longitud igual a ese segmento y se fijan sus extremos a los focos F y F' .

Se estira el hilo con la punta de un lápiz y se mueve este último hasta dar una vuelta completa. En este movimiento el lápiz ha dibujado una elipse, puesto que para cualquier posición del mismo, la suma de las distancias de un punto a los focos es igual a la longitud total del hilo, es decir, al segmento dado ($2a$, eje mayor).

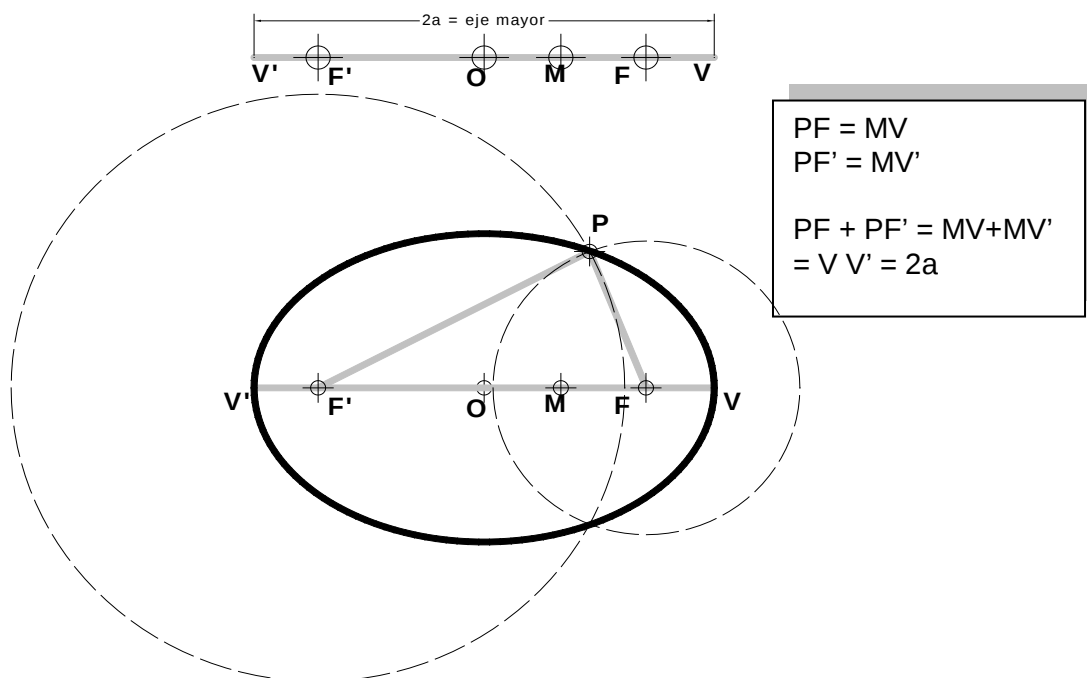


2- CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE POR PUNTOS DADOS LOS FOCOS Y EL SEGMENTO 2ª

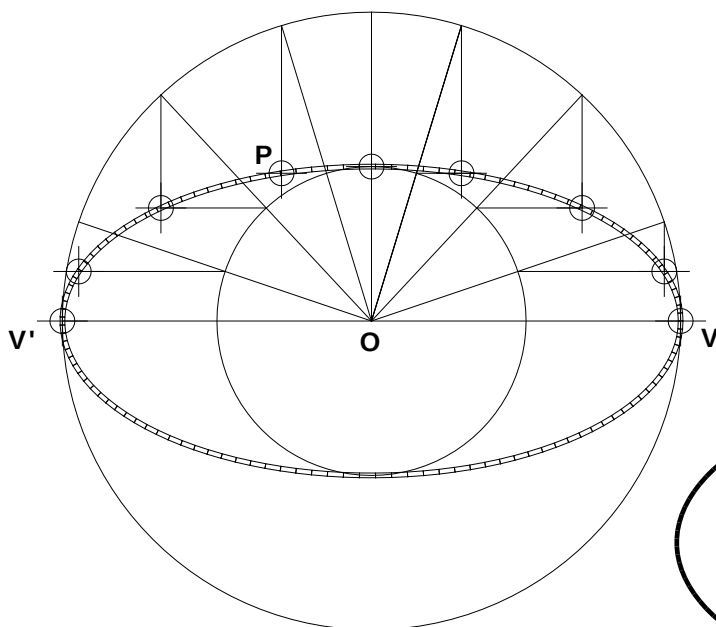
Sobre un segmento de longitud $= 2a$ (eje mayor de la elipse), se marca O (punto medio del segmento y centro de la elipse); y los focos F y F' .

Se toma ahora un punto cualquiera, por ejemplo el punto M del segmento FF' .

Con un compás y con radios VM y $V'M$, y haciendo centro en los focos se trazan arcos de circunferencia que se cortan. Esos punto P pertenecen a la elipse dado que se verifica que la suma de sus distancias a los focos es igual a $2a$ (eje mayor).



3- CONSTRUCCIÓN DE LA ELIPSE CONOCIENDO a (semieje mayor) y b (semieje menor)



Se trazan dos circunferencias concéntricas de radio " a " y de radio " b ".

Por el centro de las mismas se trazan rayos (líneas rectas) hacia cualquier punto del contorno. Esas líneas cortan a ambas circunferencias en dos puntos.

Por dichos puntos se trazan rectas perpendiculares:

de la circunferencia mayor, perpendicular al eje horizontal; de la circunferencia menor, perpendicular al eje vertical.

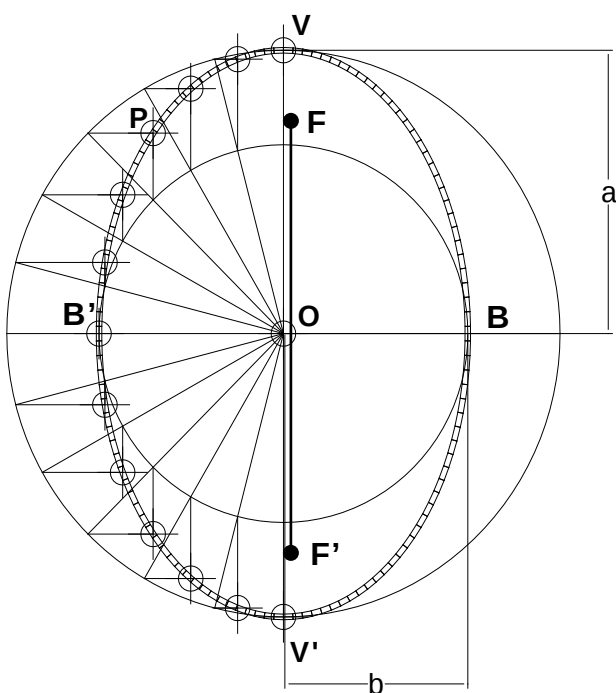
El punto de intersección de esas perpendiculares **es un punto que pertenece a la elipse**.

Uniendo los puntos hallados podemos dibujar una elipse perfecta.

Ejemplos...

11) Representar por este método de construcción, la elipse de eje vertical del ejercicio 2).

$x^2 / 64 + y^2 / 144 = 1$ donde **$a = 12$ $b = 8$** porque **$2a = 24$ y $2b = 16$** .



Cálculo de " c ":

$$c = \sqrt{144 - 64} = 8,944$$

$$2c = 17,88$$

Si la elipse está centrada en el origen, las coordenadas de los focos son:

F (0;8,944) F' (0; - 8,944)

Los puntos de intersección con el eje " x "

B (8;0) B' (-8;0)

Los puntos de intersección con el eje " y "

V (0;12) V' (0 ; -12)

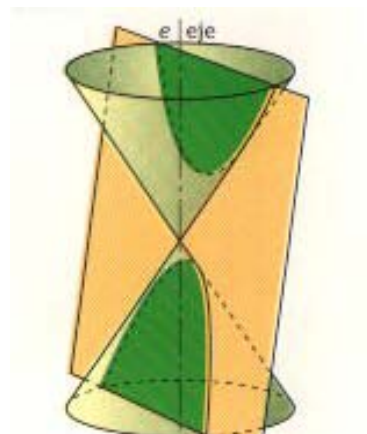
Sup: 301,592 m²

Perímetro: 64,076 m

Secciones Cónicas abiertas: LA HIPÉRBOLA

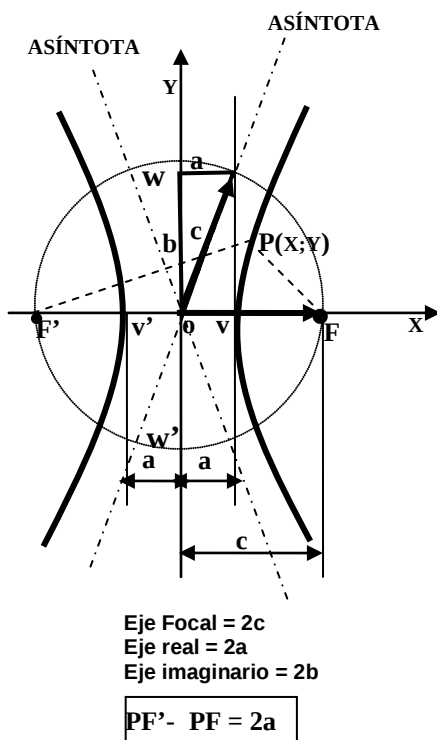
DEFINICIÓN:

Geométricamente una hipérbola resulta de la intersección de una superficie cónica circular con un plano, que no pasa por el vértice del cono y es paralelo a dos generatrices



En geometría analítica: **Hipérbola:** Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos fijos llamados focos es constante.

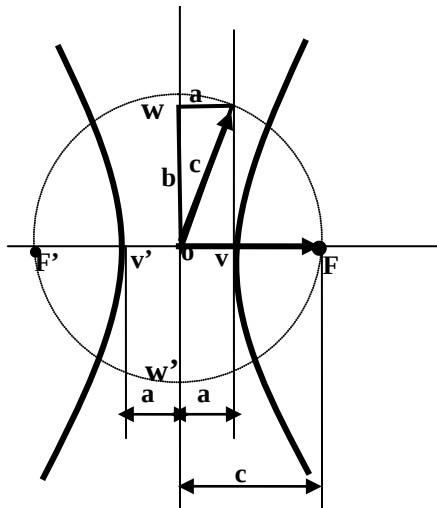
GRÁFICA 1



• ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

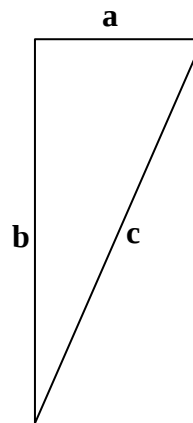
- Los puntos **F** y **F'** son los focos de la hipérbola.
- La distancia entre los puntos llamados focos se llama **distancia focal**.
La **semidistancia focal** $OF = OF'$ se conoce como "**c**".
- La recta determinada por los focos se llama **eje focal**.
- El punto medio **O** entre los focos se llama centro de la hipérbola.
- Los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal se llaman vértices (**V** y **V'**).
- **Eje normal:** recta que pasa por el centro de la Hipérbola y es perpendicular al eje focal. La distancia del vértice al centro se conoce como "**a**".
- El segmento **VV'** se llama **eje principal** o **eje transverso** o **eje real** de la hipérbola, donde $VV' = 2a$
- **Eje no transverso o imaginario:** es el definido por el segmento $WW' = 2b$ (ver gráfica 2).

GRÁFICA 2



Eje Focal = $2c$
Eje real = $2a$
Eje imaginario = $2b$

Analizando el triángulo formado por “a”, “b” y “c”



Según Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

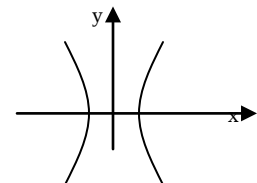
ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Estudiaremos la ecuación de la hipérbola para dos casos específicos, a saber:

1. Cuando el eje focal es horizontal y el centro de la hipérbola coincide con el origen de coordenadas, la ecuación resulta :

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA CON EJE REAL COINCIDENTE CON EL DE ABCISAS

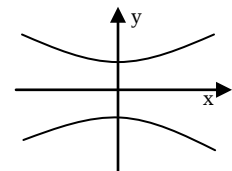
$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$



2. Cuando el eje focal es vertical y el centro de la hipérbola coincide con el centro de coordenadas del sistema referencial, la ecuación será:

ECUACIÓN CANÓNICA DE LA HIPÉRBOLA CON EJE REAL COINCIDENTE CON EL DE ORDENADAS

$$y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$$



De lo visto podemos inferir que la posición de una hipérbola con relación a los ejes coordenados, puede determinarse por los signos de los coeficientes de las variables en la forma canónica de la ecuación. Así es como, la variable de coeficiente positivo, indica al eje que contiene al eje focal.

-¿Como sería la ecuación de una hipérbola con eje focal paralelo pero no coincidente con el eje de abscisas y cuyo centro no se encuentra sobre el eje de ordenadas?

La respuesta surge de ver que en este caso las coordenadas del centro $(h;k)$ tienen un valor distinto de cero, y por lo tanto, seleccionando la ecuación correspondiente agregaremos en el numerador los valores $(h;k)$ tal como hiciéramos anteriormente con las ecuaciones de las cónicas vistas:

$$(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$$

EXCENTRICIDAD

Como viéramos anteriormente, $c^2 = a^2 + b^2$ luego $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Dividiendo ambos miembros por “a”: $c/a = (\sqrt{a^2 + b^2})/a$

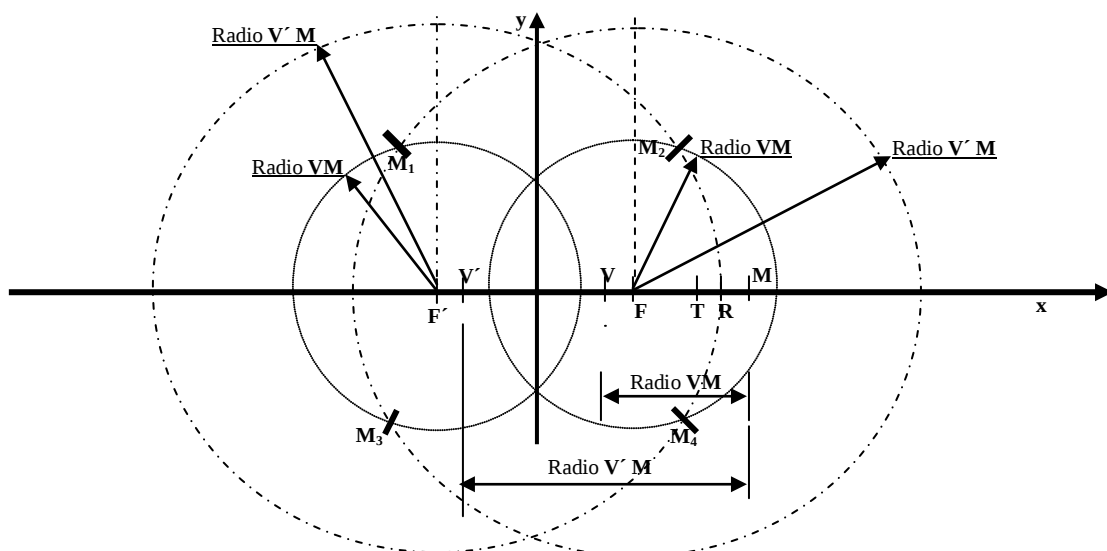
El cociente c/a se denomina excentricidad de la hipérbola, y como viéramos en la gráfica 2, el valor de “c” (siendo “c” un segmento) es siempre mayor que el valor de “a”, por lo que la excentricidad de la hipérbola es siempre mayor que la unidad.

CONSTRUCCIÓN DE LA HIPÉRBOLA POR PUNTOS:

Dados los focos F y F' y el segmento $VV' = 2a$ pueden determinarse tantos puntos como se quiera para la construcción de la hipérbola.

El procedimiento es el siguiente:

1. Consideramos un punto cualquiera “M” tal que el mismo pertenezca a la recta del eje transversal, siendo dicho punto “M” exterior al segmento FF' .
2. Haciendo centro en F y con radio igual al segmento VM se trazan dos arcos de circunferencia correspondiente al radio.
3. Ahora hacemos centro en el otro foco F' y utilizando el mismo radio se trazan otros dos arcos de circunferencia correspondiente al radio.
4. Haciendo ahora centro en F y con radio $V'M$ se cortan dos de los arcos trazados luego con centro en F' y el mismo radio se cortan los dos arcos restantes.
5. De esta manera hemos determinado cuatro puntos pertenecientes a la hipérbola M_1, M_2, M_3, M_4 .
6. Haciendo variar la posición de M y considerando ahora otros puntos, tales como T y R exteriores a FF' , y procediendo como lo hiciéramos anteriormente para M determinamos otros cuatro puntos por cada punto exterior a FF' .
7. Finalmente uniendo los puntos así obtenidos graficaremos las dos ramas de la hipérbola.

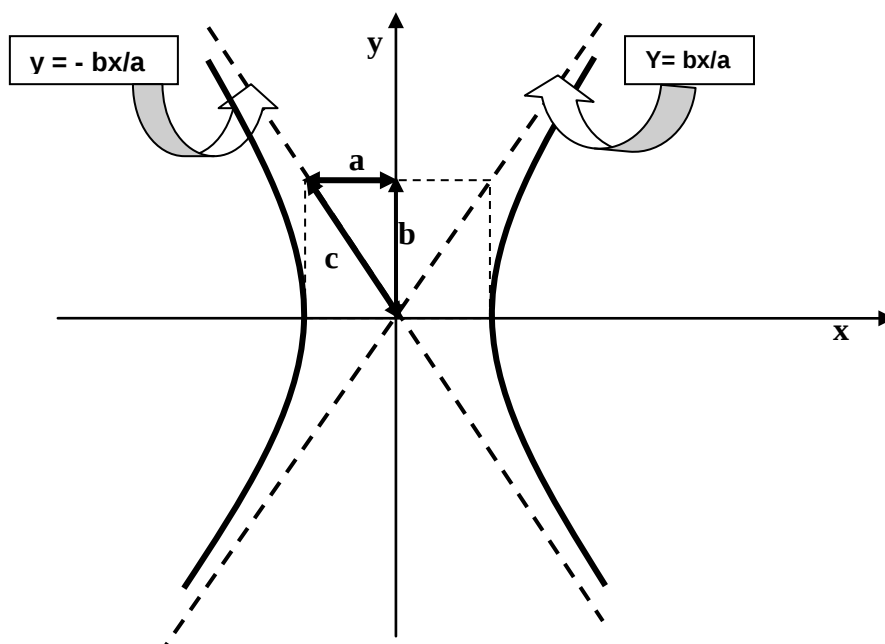


ASÍNTOTAS:

Se dice que una recta es asíntota a una curva cuando la distancia de un punto de la curva a la recta tiende a anularse, si el punto se aleja indefinidamente sobre la curva.

Como vemos en la siguiente gráfica la hipérbola tiene dos asíntotas oblicuas cuyas ecuaciones son: $y = \frac{bx}{a}$ e $y = -\frac{bx}{a}$ para el caso de que la hipérbola tenga su eje transverso paralelo o coincidente con el eje de abscisas.

En el caso de que el eje transverso sea coincidente con el eje de ordenadas las asíntotas serán $y = \frac{ax}{b}$ e $y = -\frac{ax}{b}$.



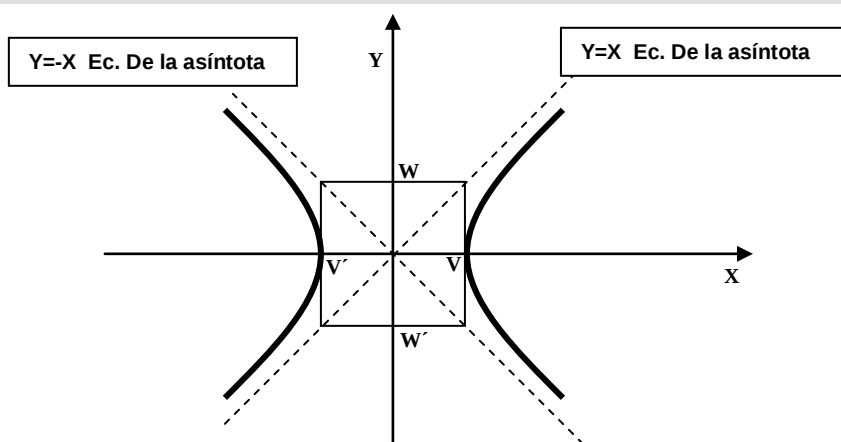
HIPÉRBOLA EQUILÁTERA:

Cuando las distancias " a " y " b " son iguales las asíntotas son bisectrices del 1º y 2º cuadrante. Luego la ecuación de esta hipérbola, cuyo eje principal o real es igual a su eje imaginario será: $x^2 - y^2 = a^2$

Para arribar a esta ecuación se siguen los siguientes pasos:

- 1- Planteamos la ecuación de la hipérbola, en este caso consideraremos el eje real coincidente con el eje de abscisas, así resulta: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- 2- Como señaláramos anteriormente en el caso de la hipérbola equilátera resulta $a = b$, luego la ecuación quedaría: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$
- 3- Multiplicando ambos miembros por a^2 resulta:

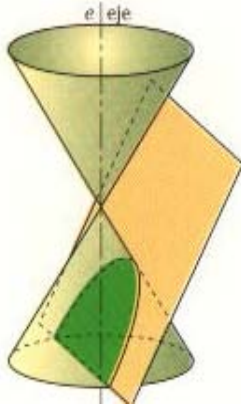
$x^2 - y^2 = a^2$ ecuación de la hipérbola equilátera con eje real coincidente con el de abscisas.



GRÁFICA DE LA HIPÉRBOLA EQUILÁTERA Y SUS ASÍNTOTAS. EJE REAL COINCIDENTE CON EL DE ABCISAS

Secciones Cónicas abiertas: LA PARABOLA

La Parábola y la Hipérbola se las denominan CÓNICAS ABIERTAS ya que estas curvas se extienden indefinidamente; a diferencia de la Circunferencia y la Elipse que, como ya, vimos son curvas cerradas.



Podemos analizar la parábola desde la geometría básica y decimos que es una curva plana abierta de una rama que se obtiene al seccionar una superficie cónica circular recta, con un plano secante y paralelo a una generatriz del cono

Desde el **análisis matemático** como una función polinómica; que desarrollaremos mas adelante.

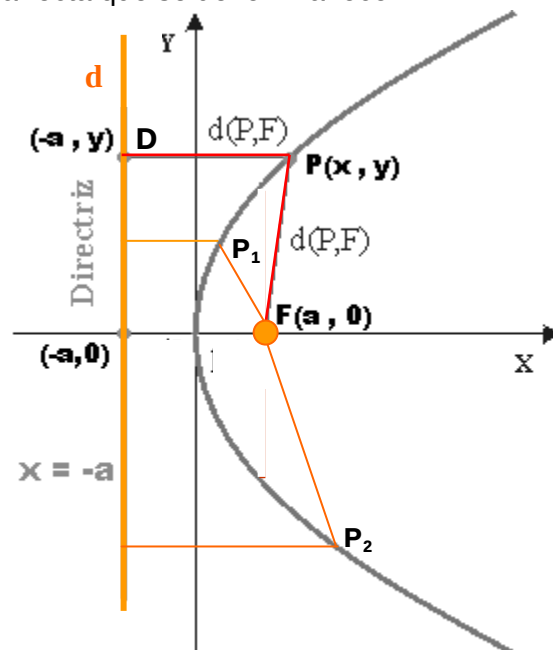
Y estudiándola desde el punto de vista de la **geometría analítica** podemos extendernos y hallar así su:

DEFINICION

Una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta dada, llamada directriz, y un punto fijo fuera de la recta que se denomina foco.

Parábola

$$d(PF) = d(PD)$$



ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

F: foco de la parábola.

d: recta directriz.

Eje focal: eje de simetría de la parábola. Es una recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

Vértice de la Parábola: $V(h; k)$ es el único punto de la parábola que toca el eje focal.

Se observa que $AV = VF$ por lo tanto se demuestra que el Vértice V pertenece a la parábola por cumplir con la definición.

De esto se deduce que su
Excentricidad es = 1

La unicidad se refiere a que todas las parábolas son semejantes, es decir, tienen la misma forma, salvo su escala.

Lado recto de la parábola: es la más importante de sus cuerdas. Este segmento une los puntos C y C' , siendo perpendicular al eje focal, y pasando por el foco. Por lo tanto el latus rectum o lado recto, debe ser siempre positivo, al ser un segmento, se considera su valor absoluto.

Parámetro: (p) es la distancia del vértice al foco VF .

Observamos:

Si bien p es la distancia del vértice al foco; es también la distancia del vértice al pie de la perpendicular A , en donde se intersecta el eje de la parábola con la directriz.

Así, desde A hasta F es igual a $2p$.

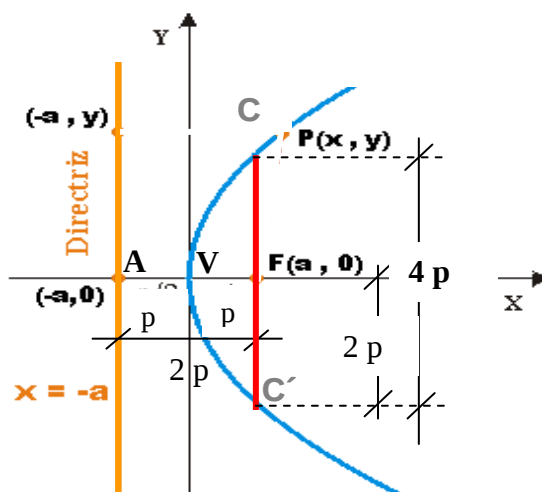
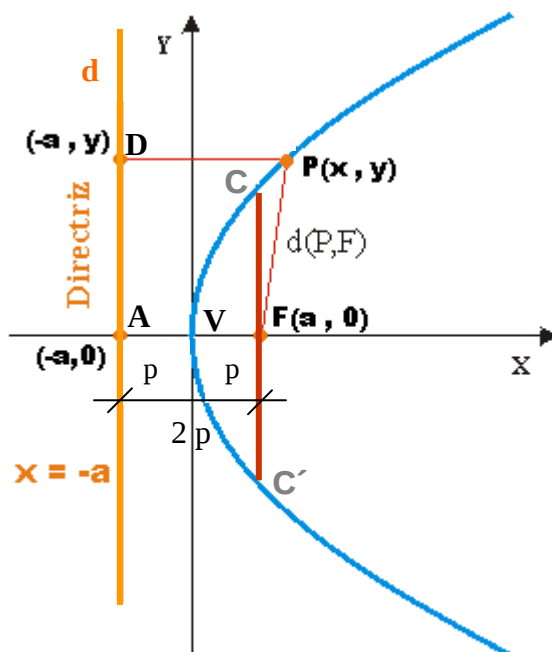
Si trasladamos esta medida desde el Foco, en forma perpendicular al eje focal ubicaremos el punto C y luego por simetría C' .

Por lo que establecemos que el segmento CC' es el Lado recto de la parábola y es $= 4p$

Esta distancia direccionada (p), **distancia del vértice al foco VF** nos determina un origen y un extremo.

Por lo tanto p adoptará valores **positivos** si se dirige a la derecha y hacia arriba y valores **negativos** si se dirige hacia la izquierda y hacia abajo.

Esto cobra importancia fundamental en el momento de reconocer en la ecuación la posición que adoptará éste lugar geométrico.



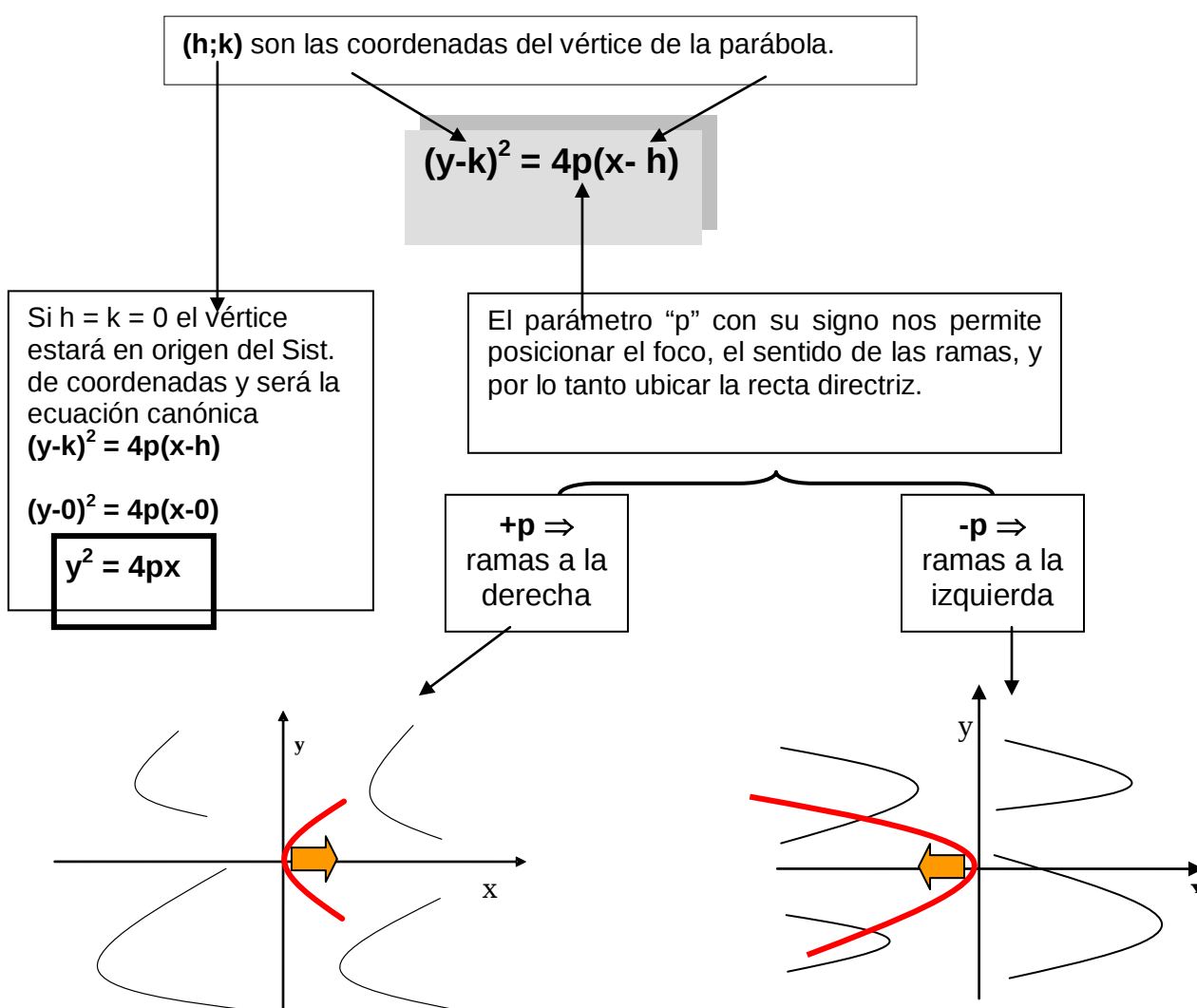
ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

Si referimos la parábola a un sistema de ejes cartesianos ortogonales se pueden producir dos situaciones a saber:

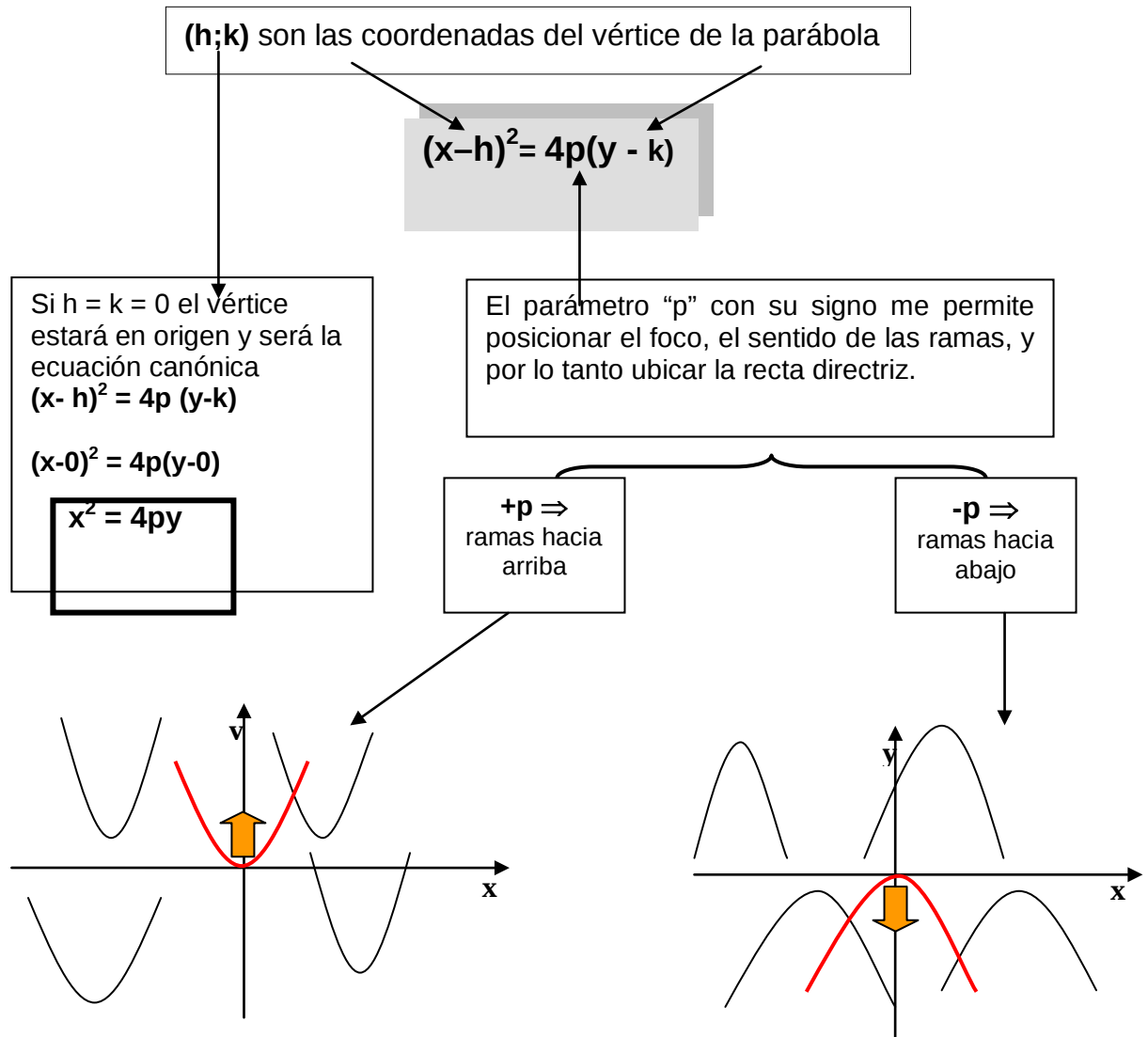
1- Que el **eje focal coincida, o sea paralelo al eje de abscisas** con lo que diremos que la parábola es a eje horizontal.

2- Que el **eje focal coincida, o sea paralelo al eje de ordenadas** con lo que diremos que la parábola es a eje vertical.

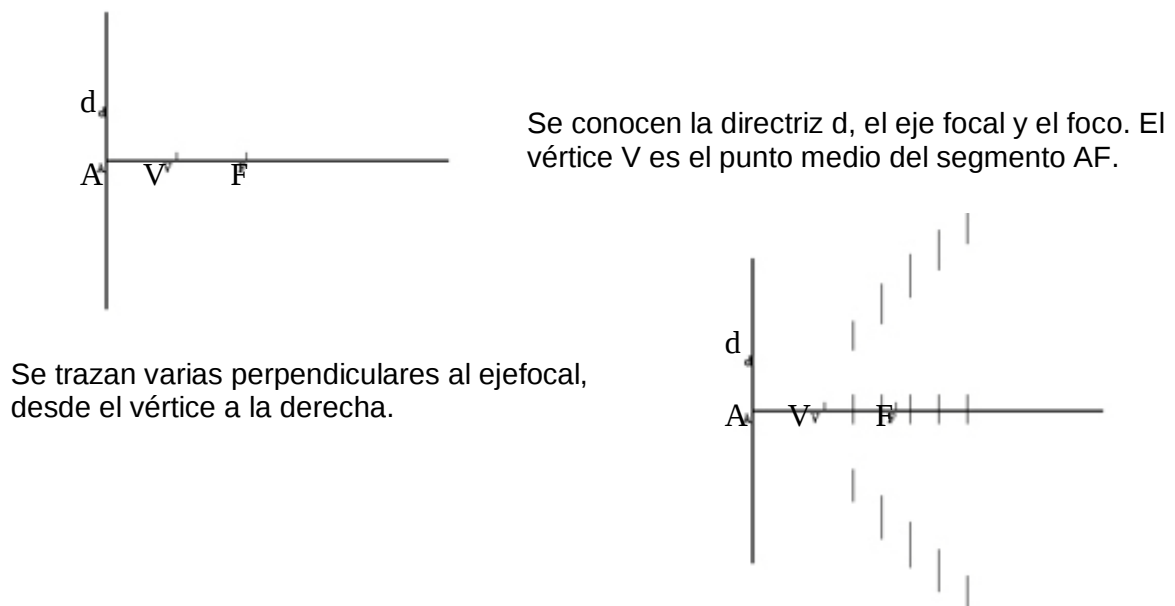
1 - ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA A EJE HORIZONTAL



2 - ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA A EJE VERTICAL

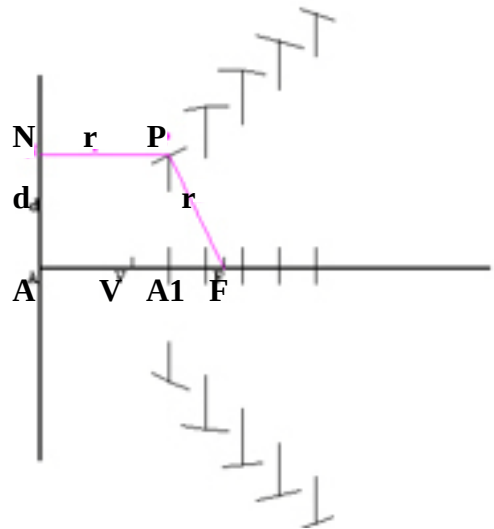


CONSTRUCCION DE LA PARABOLA POR PUNTOS

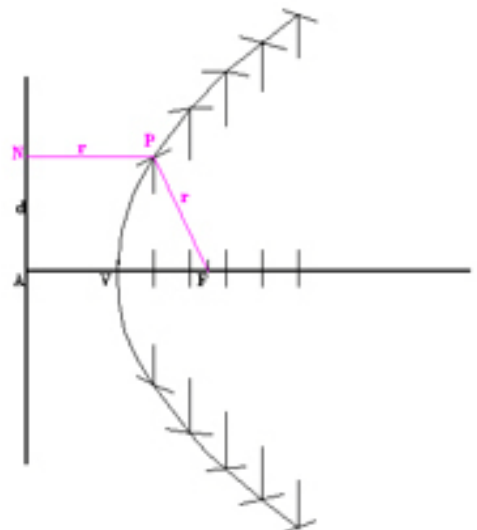


Con centro en F y radio $\overline{AA_1}$, se corta a dicha perpendicular, obteniendo el punto P y su simétrico, que son puntos de la curva.

Se obtiene así $r = PF = PN$, según la definición de la curva.



Esta operación se repite para obtener nuevos puntos que al unirlos delinean a la PARABOLA.



LA PARÁBOLA- FUNCIÓN POLINÓMICA DE 2º GRADO

La parábola es la única de las cónicas que podemos verla desde el punto de vista de la Geometría Analítica y también desde el punto de vista del Análisis Matemático, bajo el concepto de FUNCION.

Por esta causa sólo se considerarán las parábolas cuyos ejes de simetría, se encuentran en posición vertical.

Si desarrollamos algebraicamente la ecuación de la parábola a eje vertical

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$



Obtenemos LA FUNCION POLINÓMICA PARABOLICA y CUADRATICA

$$y = ax^2 + bx + c$$

Del desarrollo algebraico de las ecuaciones se desprenden las fórmulas que a continuación se detallan y que permiten vincular ambas ramas de la matemática teniendo un conocimiento completo del comportamiento de esta curva.

$$a = 1/4p$$

$$b = -2h / 4p$$

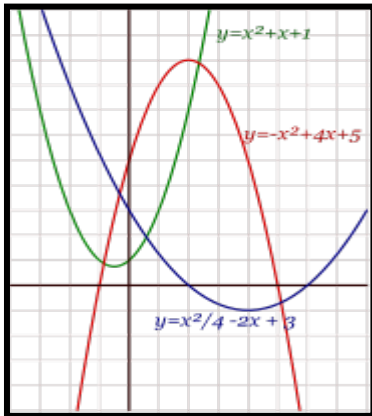
$$c = h^2/4p + k$$

$$P = 1/4a$$

$$h = -b / 2a$$

$$k = -b^2/4a + c$$

LA PARÁBOLA COMO FUNCIÓN POLINÓMICA:



Coeficiente principal Coeficiente del término en x

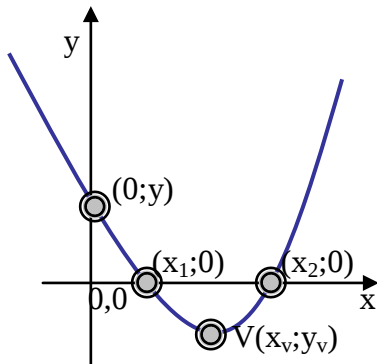
$y = a x^2 + b x + c$

término de 2º grado término de 1º grado término independiente

Como vimos en geometría analítica hay dos tipos de problemas; dada la ecuación hallar el lugar geométrico y viceversa, dado el lugar geométrico hallar la ecuación.

Aquí pretendemos lo mismo.

Dada la función hallar el lugar geométrico de la parábola significa que deberemos encontrar puntos representativos que permitan trazar el gráfico de dicha curva.



Estos puntos son:

1- El vértice $V(x_v; y_v)$.

$$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_v = +c - \frac{b^2}{4a}$$

2- El punto donde la Parábola corta el eje de ordenadas (0 ; y).

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = c$$

3- Los puntos donde la Parábola corta el eje de abscisas, o sea cuando y es igual a 0. **Esto es muy importante:** la curva corta en más de un punto al eje x . Por que

Si $y = 0$
 $0 = ax^2 + bx + c$
 la función se convierte en ecuación de segundo grado y al resolverla **tendrá dos raíces**; $(x_1; 0)$ y $(x_2; 0)$.

Resolvemos la ecuación y encontramos sus dos Raíces aplicando:

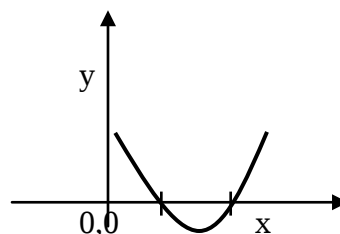
$$x_1 = (- b + \sqrt{b \cdot b - 4ac}) / 2a$$

$$x_2 = (- b - \sqrt{b \cdot b - 4ac}) / 2a$$

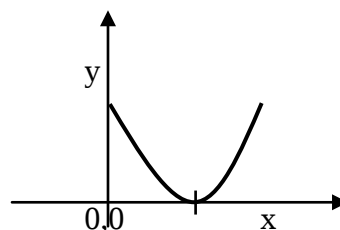
Una ecuación cuadrática puede arribar a tres tipos de soluciones según el signo del Discriminante D, a saber:

$$\text{Discriminante} = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

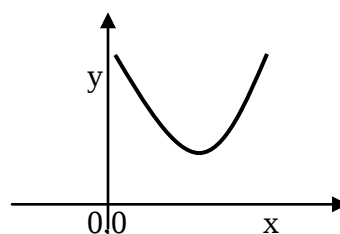
Si el discriminante es positivo, de la raíz cuadrada se obtiene dos números reales generándose **dos raíces reales distintas**.



Si el discriminante es cero, la raíz cuadrada es cero, y ambas raíces resultan **el mismo número**.

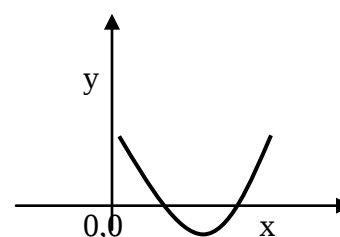


Si el discriminante es negativo, la raíz cuadrada no tiene solución dentro del campo de los números reales; se obtiene **dos raíces imaginarias** o complejas; y la parábola no toca el eje de abscisa.

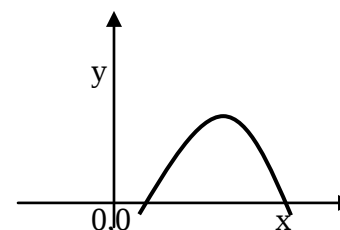


ANALIZANDO AHORA LOS DISTINTOS TÉRMINOS VEMOS QUE:

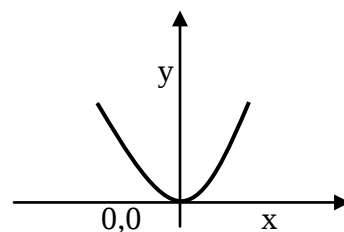
Si el coeficiente “a” tiene signo positivo, $a > 0$ tendremos una función decreciente y luego de su punto mínimo comienza a crecer, o sea que las ramas irán hacia arriba.



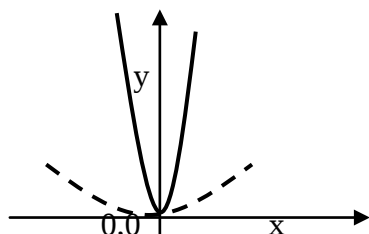
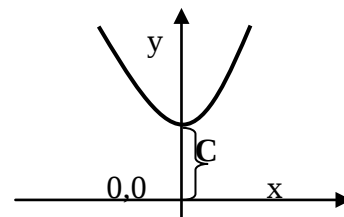
Si el coeficiente “a” tiene signo negativo, $a < 0$ tendremos una función creciente y luego de su punto máximo comienza a decrecer, o sea que las ramas irán hacia abajo.



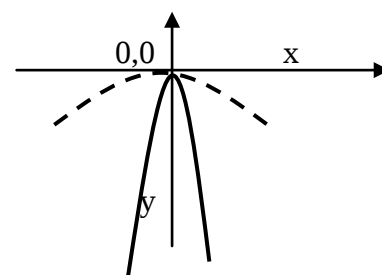
Si la forma de la ecuación es incompleta y sólo se encuentra el término de segundo grado, sea este positivo o negativo, por ejemplo $y = + a x^2$ el eje de ordenadas es el eje de simetría y su vértice coincide con el origen del sistema. Por lo tanto, para poder graficar a esta curva será necesario valuar los distintos punto de x para hallar los valores de y.



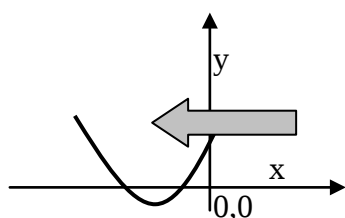
Si la forma de la ecuación es incompleta y falta el término en x por ejemplo $y = ax^2 + c$ el eje de ordenadas es el eje de simetría y su vértice dista un valor igual a c del origen del sistema. Por lo tanto el término c indica en que punto corta la parábola al eje de ordenadas.



Cuanto mayor sea el valor de " a " en valor absoluto menor será la apertura de las ramas de la parábola. Las ramas se acercan al eje de simetría (línea continua).



Cuanto menor sea el valor de " a " en valor absoluto mayor será la apertura de las ramas. se acercan al eje x (línea de trazo).



Si los signos de los términos afectados por la **variable "x"** son iguales, por ejemplo

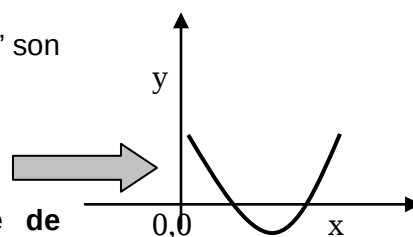
$$y = +ax^2 + bx + c$$

la parábola se desplaza hacia la **izquierda del eje de ordenadas**.

Si los signos de los términos afectados por la **variable "x"** son distintos, por ejemplo

$$y = +ax^2 - bx + c$$

la parábola se desplaza hacia la **derecha del eje de ordenadas**.



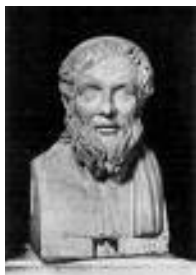
PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Dada la función se pudo construir la gráfica de la parábola al encontrar los puntos necesarios. Ahora bien, se plantea la posibilidad inversa; que dada sus raíces pueda determinar la función, cuando el coeficiente principal " a " es = 1, aplicando la propiedad de las raíces

$$\left. \begin{array}{l} -(x_1 + x_2) = b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{array} \right\} \text{Cuando } a = 1$$

Cuando " a " es distinto de 1 se deberá multiplicar a cada término de la función por el mismo valor del coeficiente principal deseado.

Haciendo un poco de Historia:



La geometría de las cónicas, elipse, hipérbola y parábola, es una de las secciones profundas de la matemática que, por su belleza, armonía y riqueza de ideas, se ha desarrollado más precozmente. Los tres grandes genios de la matemática griega, Euclides, Arquímedes y Apolonio son los responsables de que ya a finales del siglo III a. de C. se conociese prácticamente tanto como hoy conocemos sobre las propiedades de las cónicas.

Apolonio Nació hacia 262 a. de C. en Perga, una ciudad griega situada en la actual Turquía. Estudió y enseñó también en Alejandría, donde murió en 190 a. de C. Se ocupó también de óptica y astronomía, introduciendo métodos muy originales y obteniendo resultados muy profundos.

Para los antiguos geometrías griegos una sección cónica (parábola, elipse e hipérbola) era una curva en el espacio, la cual resultaba de la intersección de un plano con un cono de dos mantos o ramas, siempre y cuando el plano no pasara por el vértice del cono. En caso de que lo hiciera daba lugar a las llamadas cónicas degeneradas un punto (el vértice del cono), una recta (un generatriz del cono) o un par de rectas que se intersectan (un par de generatrices)).

Los griegos en su tiempo se dedicaron con perseverancia al estudio de sus propiedades geométricas.

Apolonio demostró que las curvas cónicas tienen muchas propiedades interesantes. Algunas de esas propiedades son las que se utilizan actualmente para definir las. Quizás las propiedades más interesantes y útiles que descubrió de las cónicas son las llamadas propiedades de reflexión. Si se construyen espejos con la forma de una curva cónica que gira alrededor de su eje, se obtienen los llamados espejos elípticos, parabólicos o hiperbólicos, según la curva que gira.

Sin embargo, es hasta inicios del siglo XVII (1637), con el descubrimiento casi de manera independiente de la geometría analítica, por parte de Descartes y Fermat, que se toma conciencia de su utilidad y pasan a ocupar un lugar de privilegio, adicionalmente Kepler descubrió (y Newton explicó) que las órbitas de los planetas y otros cuerpos en el sistema solar son secciones cónicas.

Aplicaciones

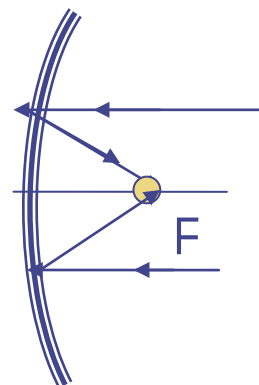
Fue Apolonio de Perga, el primero que introdujo públicamente las secciones cónicas escribiendo el más antiguo e importante tratado sobre las mismas. Lo que no es tan conocido es que el motivo que origino la creación de esta obra que no fue precisamente el de explicar las orbitas de los planetas ni construir aparatos de radar, sino el de buscar soluciones solo con regla y compás de los tres famosos problemas griegos que hoy sabemos irresolubles, como son el de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Durante muchos siglos, las cónicas fueron descartadas en los trabajos de los matemáticos hasta que volvieron súbitamente a la vida, al comprobarse que el mundo que nos rodea esta lleno de secciones cónicas y constantemente aparecen en situaciones reales como podemos ver en las imágenes que ilustran las aplicaciones.

En la elipse encontró Kepler la respuesta al enigma del movimiento planetario, descubriendo que el planeta Marte (ahora sabemos que al igual que el resto de los planetas) tiene orbitas elipticas y el sol esta situado en uno de sus focos (de ahí el nombre dado a estos puntos). En base a este descubrimiento Newton enunció la famosa ley de la gravitación universal; así el descubrimiento de Kepler se deduce como consecuencia matemática de dicha ley. También los satélites y los cometas tienen orbitas elípticas, de mayor o menor excentricidad, lo cual es en cierto modo providencial, pues si se tratara de hipérbolas o parábolas, no volverían a repetir su ciclo. También Galileo demostró que las trayectorias de los proyectiles son parabólicas.

Donde encontramos la presencia de las cónicas en el mundo que nos rodea

Parábola

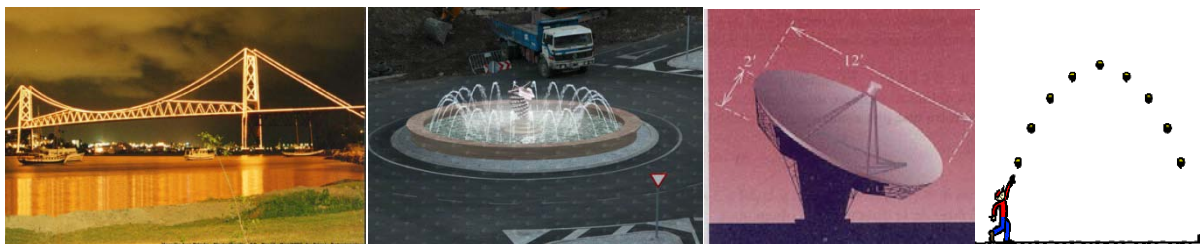
- Trayectoria de un proyectil (despreciada la resistencia del viento)
- Cable de un puente suspendido. (Un cable de suspensión colgado entre dos postes sostiene una estructura de densidad uniforme mucho más pesada que el propio cable y toma la forma aproximada de una parábola)
- Reflectores parabólicos → todo rayo paralelo al eje se refleja de manera que pasa por el foco.
- Si un espejo de un telescopio es parabólico (paraboloide), un rayo de luz que incide en el espejo se reflejará en el foco. El paraboloide es una superficie que se obtiene al girar una parábola alrededor de su eje. Los espejos parabólicos tienen forma de paraboloide, y se usan principalmente en la construcción de telescopios



y antenas: los rayos de luz recibidos desde una fuente lejana (como las estrellas) viajan paralelos al eje de la parábola y se reflejan para converger en el foco de la misma.

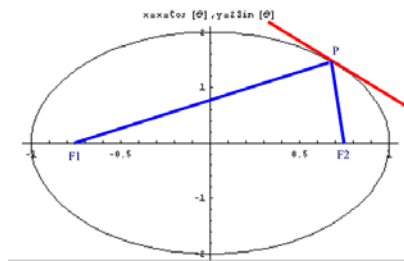
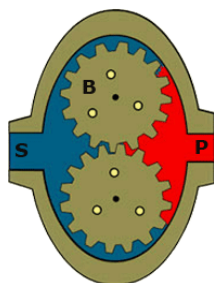
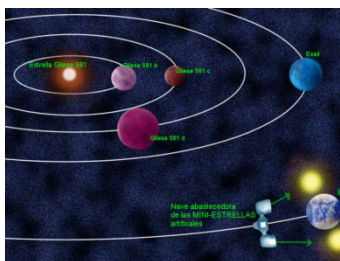
Inversamente, cuando la fuente de luz está en el foco, los rayos de luz se reflejan y viajan paralelos al eje de la parábola. Este es el principio usado en los faros de los automóviles, proyectores y radares.

- La antena de un radio telescopio
- La línea que describe cualquier móvil que es lanzado con una cierta velocidad inicial, que no sea vertical, es una parábola.



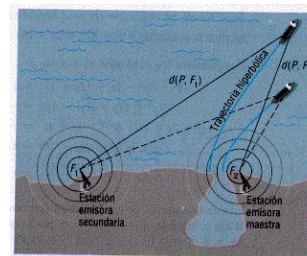
Elipse

- Orbitas de los planetas (con el sol en uno de los focos)
- Orbitas de las lunas de los planetas.
- Propiedad focal: Un rayo que sale de un foco se refleja hacia el otro. La elipse tiene una propiedad muy interesante: Si unimos cualquier punto, P , de la elipse con sus focos, el ángulo que forman los radios focales con la tangente en ese punto son iguales. Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos (de luz y sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde uno de los focos se refleja en el otro foco.
- Engranajes elípticos de algunas maquinarias

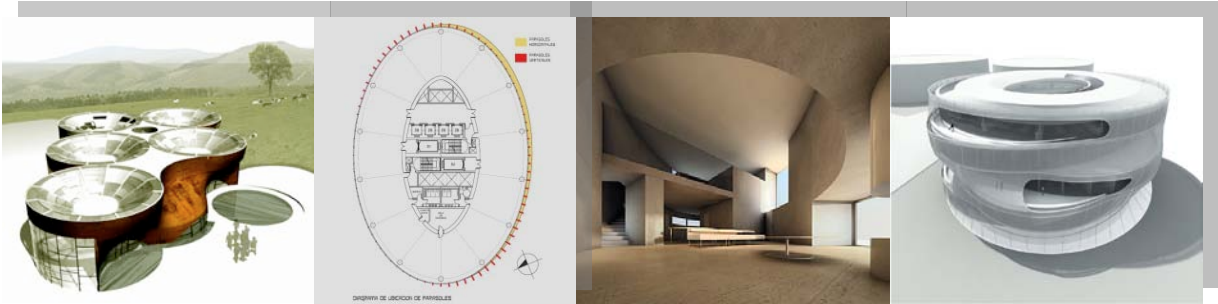


Hipérbola

- Utilizada en la construcción de ciertos lentes telescópicos.
La hipérbola tiene una propiedad interesante: Si unimos cualquier punto, P , de la hipérbola con sus focos, el ángulo que forman los radios focales con la tangente en ese punto, son iguales. (También se puede decir que la tangente es la bisectriz del ángulo que forman los radios focales). Esta propiedad se utiliza en la construcción de espejos (de luz y sonido), pues la emisión, de luz o sonido, desde el foco se refleja en la dirección de la recta que une el otro foco con el punto.
- La trayectoria de algunos cometas. Un cuerpo celeste que provenga del exterior del sistema solar y sea atraído por el sol, describirá una órbita hiperbólica, teniendo como un foco al sol y saldrá nuevamente del sistema solar.
- En las ciencias físicas ciertas formulas son del tipo hiperbólico
- Se utiliza en la navegación, la propiedad de la definición de la hipérbola "la diferencia de las distancias de los puntos de la hipérbola a los focos es constante". En el sistema de navegación LORAN, una estación radioemisora maestra y otra estación radioemisora secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en altamar. Puesto que un barco que monitoree las dos señales estará probablemente más cerca de una de las estaciones, habrá una diferencia entre las distancias recorridas por las dos señales, lo cual se registrará como una pequeña diferencia de tiempo entre las señales. En tanto la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia entre las dos distancias será también constante. Si el barco sigue la trayectoria correspondiente a una diferencia fija de tiempo, esta trayectoria será una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones. Si se usan dos pares de transmisores, el barco deberá quedar en la intersección de las dos hipérbolas correspondientes.



También en la Arquitectura podemos apreciar la presencia de las secciones cónicas. Se adjuntan imágenes donde se puede verificar la utilización de las mismas en plantas, cortes y vistas explotando sus propiedades geométrica en las dos dimensiones del plano y como generadoras (generatrices) de las superficies llamadas cuádricas en las tres dimensiones del espacio.



Circunferencias -
Complejo Lúdico Termal
en el futuro paisaje
urbanístico de la provincia
de Pontevedra, España

Elipse
La futura CajaSol -
proyecto de Cesar
Pelli - Puerto Triana-
Sevilla-

Elipse
El equipo formado por
Enrique Azpilicueta, Paloma
Lasso de la Vega y Luis
Enguita ha resultado ganador
en el concurso de
arquitectura convocado para
elegir el diseño de uno de los
últimos edificios del Campus
de la Justicia de Madrid que
quedaban por asignar, el del
Juzgado de Guardia.

Elipse
El arquitecto italiano
Antonino Cardillo presenta
esta vivienda, una elipse de
hormigón que se dilata
hacia el este y el oeste. La
enorme curva crea unos
interesantes espacios en el
interior, a la vez que en su
totalidad, el edificio se ve
como un único elemento,
elegante, e integrado en la
colina en el que está
ubicado.



Parábola:
El arco de St. Louis, en el
estado de Missouri es un
prodigio de la construc-
ción y fue diseñado por el
arquitecto finés-americano
Eero Saarinen. Tiene for-
ma de catenaria (la cuerda
que se forma al sujetar un
cable desde los bordes y
dejarlo caer) invertida.

Parábola
Gazprom tower en
San Petersburgo-
Rusia
Proyecto del Arq
Daniel LIEBESKIND.

Parábola
Erick van Egeraat ganó el
concurso internacional para
la Librería Nacional de Kasan,
capital de la República de
Tatarstan, Rusia. La nueva
Librería Nacional contará con
una superficie de 81.000 m2 y
estará ubicada en la Plaza
Tukay, en el borde sur-este
del centro de la ciudad.

Hipérbola
Catedral de Brasilia, del
Arq. Oscar Niemeyer

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

- Geometría Analítica -Joseph Kindle – Serie Schaum
- Geometría analítica del plano y del espacio y tomografía- Donato Di Pietro-
- Diccionario de Matemáticas– Santiago valiente Barderas-AWL
- Matemáticas I- Arqta. Beatriz Yeremián- FAUD-
- Matemática – Apuntes de Cátedra– Modulo III – DI. Arqta. Beatriz Yeremián - FAUD-
- <http://www.interactiva.matem.unam.mx/conicas>
- http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Conicas/marco_conicas.htm